MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

H. WIELANDT
TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

56. BAND 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 14. JULI 1952)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1952

Math.
Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht. Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlags nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27, **R. Nevanlinna**, Zürich/Schweiz, Hadlaubstraße 45,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6, **E. Schmidt**, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

Geschäftsführender Herausgeber:

H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebs-Vertretung des Verlages im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W. C. 2.

56. Band. **Inhalt:** 2. Heft.

Seite

Weyl, Prof. Dr. H., Zürich (Schweiz), Bergstr. 27: Die natürlichen Randwertaufgaben im Außenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges 105

Nevanlinna, Prof. Dr. R., Zürich (Schweiz), Hadlaubstr. 45: Beweis des Satzes über die Vertauschbarkeit der Differentiationen 120

Perron, Prof. Dr. O., München 27, Friedrich-Herschelstr. 11: Bemerkungen über die Verteilung der quadratischen Reste 122

Pickert, Dr. G., Tübingen, Math. Institut der Universität: Der Satz vom vollständigen Viereck bei kollinearen Diagonalpunkten 131

Zeller, Dr. K., Tübingen, Math. Institut der Universität: Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren 134

Jurkat-Peyerimhoff, Dr. W. Jurkat, Tübingen, Math. Institut der Universität: Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen 152

Meyer-König, Dr. W., Stuttgart-S, Liststr. 51: Das Taylorsche Verfahren zur Limitierung von Funktionen 179

Wielandt, Prof. Dr. H., Tübingen, Biesingerstr. 7: Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes 206

Löbell, Prof. Dr. F., München, Herzogstr. 1a: Natürliche Geometrie der Kurvenkongruenzen 208

Karamata, Prof. Dr. J., 3b, Av. E. Hentsch, Genève (Schweiz): Ein Satz über die Abschnitte einer Potenzreihe 219

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 105—119 (1952).

Die natürlichen Randwertaufgaben im Außenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges.

Konrad Knopp zum siebzigsten Geburtstag in Freundschaft zugeeignet.

Von

Hermann Weyl in Zürich und Princeton, N. J.

Die von mir in einer voraufgehenden Note[1]) gegebene Behandlung der „Kapazität" von Strahlungsfeldern hat inzwischen durch Herrn C. Müller eine wesentliche Vereinfachung erfahren, indem es ihm gelang zu zeigen, daß hier so wenig wie in der Potentialtheorie Elementarteiler höherer Ordnung auftreten[2]). Im n-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathfrak{R}_n (n \geqq 2)$ existieren zwei zueinander duale natürliche Randwertprobleme, das „elektrische" und „magnetische", für ein Schwingungsfeld vom Range q; wobei q der Werte $0, 1, \ldots, n$ fähig ist. Das magnetische Problem vom Range $n - q$ ist mit dem elektrischen vom Range q identisch. Nachdem die Herren W. K. Saunders und C. Müller dem für $n = 3$, $q = 1$ sich ergebenden Randwertproblem des elektromagnetischen Feldes von neuem ihre Aufmerksamkeit geschenkt haben[3]), möchte ich auch die von mir für den allgemeinen Fall eines beliebigen n und q vorgesehene Behandlung bekannt geben, mit der Modifikation jedoch, welche die schöne Müllersche Entdeckung möglich gemacht hat. Dafür ist der heute vielen Mathematikern geläufige Cartansche Kalkül der linearen Differentialformen, wie ich ihn kurz in § 2 auseinandersetze, das angemessene Werkzeug. Im Unterschied von neueren Untersuchungen über harmonische Integrale ist das Operationsgebiet hier euklidisch, aber nicht-kompakt.

§ 1.

Die Grundlösung.

Im $\mathfrak{R}_n$ seien $x_1, \ldots, x_n$ die Cartesischen Koordinaten eines variablen Punktes p, k eine positive Konstante. Für irgend zwei Punkte

[1]) Kapazität von Strahlungsfeldern, diese Zeitschrift **55** (1952), 187—198.

[2]) C. Müller, Zur Methode der Strahlungskapazität von H. Weyl, diese Zeitschrift **55** (1952), 80—83.

[3]) W. K. Saunders, On solutions of Maxwell's equations in an exterior region, Proc. Nat. Ac. of Sciences, USA., **38** (1952), 342—348. C. Müller, Randwertprobleme der Theorie elektro-magnetischer Schwingungen (erscheint demnächst in dieser Zeitschrift).

p, p' bezeichne $\mathfrak{r}(pp') = \overrightarrow{p'p}$ den von p' nach p führenden Vektor, r seine Länge. Σ_R sei die Kugel um den Ursprung o vom Radius R. Indem wir zunächst p' mit o zusammenfallen lassen, bestimmen wir eine kugelsymmetrische, d. i. nur von r abhängige Lösung (Grundlösung) $G(r)$ der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ aus der HANKELschen Zylinderfunktion $H(r)$ der Ordnung $\frac{n}{2} - 1$, die sich im Unendlichen asymptotisch wie $e^{-ir}/\sqrt{r}$ verhält, indem wir $G(r) = H(kr)/r^{\frac{n}{2}-1}$ setzen. Im Nullpunkt wird $G(r)$ singulär wie const. $r^{-(n-2)}$ (man weiß, wie diese Aussage für $n = 2$ zu modifizieren ist). Ein zunächst in $G(r)$ willkürlich bleibender konstanter Faktor werde so normiert, daß der Fluß von G, nämlich das Integral von $-dG/dr$ über die Kugel vom Radius r, mit $r \to 0$ gegen 2 konvergiert. Die Wahl der besonderen HANKELschen Zylinderfunktion hat zur Folge, daß

$$r^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\text{grad } G + ikG\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)$$

mit $r \to \infty$ gegen 0 strebt (Ausstrahlungsbedingung).

Ist $r = r(pp')$ die Entfernung des variablen Punktes p von einem beliebigen festen Aufpunkt p', so werde die Grundlösung $G(r)$ mit $G(pp')$ bezeichnet, und $\Gamma = \Gamma(pp')$ sei der Vektor $\text{grad}_p G(pp')$ mit den Komponenten $\partial G/\partial x_i$. Offenbar ist $\Gamma' = \text{grad}_{p'} G(pp') = -\Gamma$.

§ 2.

Kalkül der schiefsymmetrischen Tensorfelder im Euklidischen Raum.

Ein schiefsymmetrischer Tensor mit den Komponenten $f_{i_1} \ldots i_q$ vom Range q werde kurz als q-Tensor, ein derartiges Tensorfeld als q-Feld bezeichnet. Das innere Produkt $(f \cdot g)$ zweier q-Tensoren f und g ist die Summe

$$\sum f_{i_1} \ldots i_q \cdot g_{i_1} \ldots i_q,$$

erstreckt über die $\binom{n}{q}$ Kombinationen verschiedener Ziffern $i_1, \ldots, i_q$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$. Ist α ein Vektor mit den Komponenten α_i, so ist $(f\alpha)$ ein Tensor vom Range $q-1$, $[f\alpha]$ einer vom Range $q+1$, mit den Komponenten

$$(1) \quad (f\alpha)_{i_1} \ldots i_{q-1} = \sum_{i=1}^{n} f_{i_1} \ldots i_{q-1}\, i \cdot \alpha_i, \quad [f\alpha]_{i_1} \ldots i_{q+1} = \mathbf{S} \pm f_{i_1} \ldots i_q \cdot \alpha_{i_{q+1}}.$$

$\mathbf{S} \pm$ zeigt eine alternierende Summe von $q+1$ Gliedern an, die dadurch zustande kommt, daß der letzte i_{q+1} in der Reihe der Indizes schrittweise von hinten nach vorn durchgezogen wird. Man beachte die Regeln

$$(2) \qquad ((f\alpha)\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad [[f\alpha]\alpha] = 0$$

Eine triviale Rechnung ergibt für zwei Vektoren α, β

$$([f\beta]\alpha) = f(\beta\alpha) - [(f\alpha)\beta], \tag{3}$$

insbesondere für $\beta = \alpha$:

$$f(\alpha\alpha) = ([f\alpha]\alpha) + [(f\alpha)\alpha]. \tag{4}$$

Wird der Vektor α vom Betrage 1, $(\alpha\alpha) = 1$, als „Normale“ angesprochen, so liefert diese Gleichung die Zerlegung von f in einen „tangentiellen“ Tensor $f_t = ([f\alpha]\alpha)$ und einen „normalen“ $f_\nu = [(f\alpha)\alpha]$; denn wir werden f normal oder tangentiell nennen, je nachdem $[f\alpha] = 0$ oder $(f\alpha) = 0$ ist. Wird α als $(0, \ldots, 0, 1)$ normiert, so faßt f_t die $\binom{n-1}{q}$ Komponenten $f_{i_1 \ldots i_q}$ zusammen, für die keiner der q Indizes i gleich n ist, f_ν die $\binom{n-1}{q-1}$ Komponenten $f_{i_1 \ldots i_{q-1} n}$. Daher das Pythagoreische Gesetz

$$(f \cdot g) = (f_t \cdot g_t) + (f_\nu \cdot g_\nu).$$

Die folgende Regel, in der f vom Range q, w vom Range $q+1$ ist, findet vielfache Verwendung:

$$(f \cdot (w\alpha)) = ([f\alpha] \cdot w). \tag{5}$$

Nimmt man $\alpha_i = \partial/\partial x_i$, so erhält man statt (1) die beiden auf ein q-Feld f wirkenden Differentialoperatoren div und rot,

$$(\operatorname{div} f)_{i_1 \ldots i_{q-1}} = \sum_i \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_{q-1} i}}{\partial x_i}, \quad (\operatorname{rot} f)_{i_1 \ldots i_{q+1}} = \mathbf{S} \pm \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_q}}{\partial x_{i_{q+1}}}.$$

Den Formeln (2), (4) entsprechen die Gleichungen

$$\operatorname{div}\operatorname{div} f = 0, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot} f = 0; \tag{6}$$

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{rot} f + \operatorname{rot}\operatorname{div} f. \tag{7}$$

Aus einem q-Tensor f entsteht in einer gegenüber *eigentlichen* orthogonalen Koordinaten-Transformationen invarianten Weise der duale $(n-q)$-Tensor f^* nach der Gleichung

$$f_{i_1 \ldots i_q} = f^*_{i_{q+1}, \ldots, i_n},$$

in der $i_1, \ldots, i_q, i_{q+1}, \ldots, i_n$ irgend eine gerade Permutation von $1, \ldots, n$ ist. Ersetzt man konsequent alle Tensoren durch ihre dualen, so vertauschen sich die Operationen $(f\alpha)$ und $[f\alpha]$ sowie div f und rot f.

§ 3.

Greensche Formel.

Seien u, v zwei Felder vom Range q. Man bilde die folgenden beiden Vektorfelder F und $\tilde{F}$:

$$F_i = \sum_{i_1, \ldots, i_{q-1}} u_{i_1 \ldots i_{q-1} i} (\operatorname{div} v)_{i_1 \ldots i_{q-1}},$$

$$\tilde{F}_i = \sum_{i_1, \ldots, i_q} u_{i_1 \ldots i_q} \cdot (\operatorname{rot} v)_{i_1 \ldots i_q i},$$

(die Summen erstrecken sich über alle Kombinationen $(i_1, \ldots)$ zu $q-1$ bzw. q). Es sei V ein beschränktes Gebiet, das von einer oder mehreren glatten Oberflächen $\mathfrak{Q}$ begrenzt wird. Auf $\mathfrak{Q}$ bezeichne ν den Vektor der äußeren Einheitsnormalen. Ein variabler Punkt auf $\mathfrak{Q}$ werde mit s (oder s') bezeichnet; bei Integration über den Raumpunkt p oder den Flächenpunkt s bedeute dp das Volumen-, ds das Flächen-Element. Anwendung der Gaussschen Integralformel auf F und $\tilde{F}$ ergibt die Gleichungen

$$\int_V \{(\operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v) + (u \cdot \operatorname{rot} \operatorname{div} v)\} \cdot dp = \int_{\mathfrak{Q}} ((u\nu) \cdot \operatorname{div} v) \cdot ds,$$

$$\int_V \{(\operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v) + (u \cdot \operatorname{div} \operatorname{rot} v)\} \cdot dp = \int_{\mathfrak{Q}} (u \cdot (\operatorname{rot} v, \nu)) \cdot ds,$$

aus denen durch Addition nach (7) die fundamentale Greensche Formel folgt:

$$\int_V \{(\operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v) + (\operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v) + (u \cdot \Delta v)\} \cdot dp = \int_{\mathfrak{Q}} \{((u\nu) \cdot \operatorname{div} v) + (u \cdot (\operatorname{rot} v, \nu))\}\, ds.$$

Auf der rechten Seite kann man, da die Felder $(u\nu)$, $(\operatorname{rot} v, \nu)$ tangentiell sind, $\operatorname{div} v$ und u auch durch ihre tangentiellen Teile $(\operatorname{div} v)_t$, u_t ersetzen. Vertauscht man in dieser Formel u mit v und subtrahiert, so ergibt sich die zweite Greensche Gleichung

$$\int_{\mathfrak{Q}} \mathfrak{L}(u, v)\, ds = \int_V \{u(\Delta v + k^2 v) - v(\Delta u + k^2 u)\}\, dp.$$

Hier ist

$$\mathfrak{L}(u, v) = \begin{array}{l} ((u\nu) \cdot (\operatorname{div} v)_t) + (u_t \cdot (\operatorname{rot} v, \nu)) \\ - ((v\nu) \cdot (\operatorname{div} u)_t) - (v_t \cdot (\operatorname{rot} u, \nu)). \end{array}$$

Insbesondere gilt

$$\int_{\mathfrak{Q}} \mathfrak{L}(u, v)\, ds = 0, \tag{8}$$

wenn u und v Lösungen der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in V sind.

§ 4.

Eindeutigkeit.

Der Raum $\mathfrak{R}_n$ sei durch eine oder mehrere glatte Flächen $\mathfrak{Q}$ in ein beschränktes Inneres V und ein zusammenhängendes Äußeres W geteilt. Zur Untersuchung stehen (komplex-wertige) q-Felder u im Außenraum W, die daselbst der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügen. Eine derartige Lösung gilt als zulässig, wenn sie der Aus-

strahlungsbedingung genügt. Diese besagt, daß die auf der Kugel Σ_R gebildeten Ausdrücke

$$R^{\frac{n-1}{2}} \cdot \{(\operatorname{div} u)_t + i k (u \nu)\} \quad \text{und} \quad R^{\frac{n-1}{2}} \cdot \{(\operatorname{rot} u, \nu) + i k u_t\}$$

gleichmäßig in allen Richtungen gegen 0 streben, wenn der Radius R über alle Grenzen wächst. Wir suchen eine zulässige Lösung u, für welche $(\operatorname{div} u)_t$ und u_t auf Ω mit einem vorgegebenen tangentiellen $(q-1)$-Feld γ bzw. q-Feld g zusammenfallen (elektrisches Randwertproblem). Der Eindeutigkeitssatz behauptet, daß eine zulässige Lösung u in ganz W verschwindet, falls $(\operatorname{div} u)_t$ und u_t auf Ω verschwinden. Der Beweis folgt dem Rellichschen Schema. Neben u benutzt man das konjugierte Feld $\bar{u}$. Gemäß der Ausstrahlungsbedingung konvergiert das über Σ_R erstreckte Integral von

$$\int \begin{matrix} ((\operatorname{div} u)_t + i k (u \nu),\ (\operatorname{div} \bar{u})_t - i k (\bar{u} \nu)) \\ + ((\operatorname{rot} u, \nu) + i k u_t,\ (\operatorname{rot} \bar{u}, \nu) - i k \bar{u}_t) \end{matrix} \tag{9}$$

mit $R \to \infty$ gegen Null. Sobald Σ_R ganz V einschließt, kann man die Greensche Formel (8) auf die beiden Felder $u, \bar{u}$ in dem von Σ_R begrenzten Teil von W anwenden. Wegen der auf Ω geltenden Randbedingungen folgt alsdann, daß das über Σ_R erstreckte Integral von $\mathfrak{L}(u, \bar{u})$ exakt gleich 0 ist, und aus unserer Aussage ergibt sich demnach, daß das Integral von

$$(|(\operatorname{div} u)_t|^2 + |(\operatorname{rot} u, \nu)|^2) + k^2 (|u_\nu|^2 + |u_t|^2)$$

mit $R \to \infty$ gegen 0 strebt und demnach a fortiori das Integral von

$$|u_\nu|^2 + |u_t|^2 = (u \cdot \bar{u}) = \Sigma |u_{i_1 \dots i_q}|^2.$$

Anwendung des Rellichschen Lemmas auf jede der Komponenten $u_{i_1 \dots i_q}$ führt zu dem gewünschten Resultat.

§ 5.

Integralgleichung des elektrischen Randwertproblems.

Die Größen

$$G \cdot \begin{vmatrix} \delta_{i_1 k_1}, \dots, \delta_{i_1 k_q} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \delta_{i_q k_1}, \dots, \delta_{i_q k_q} \end{vmatrix} = G_{i_1 \dots i_q, k_1 \dots k_q} \tag{10}$$

können als die Komponenten einer Matrix betrachtet werden, für welche $(i_1, \dots, i_q)$ als Zeilen-, $(k_1, \dots, k_q)$ als Kolonnen-Index figuriert. Für variables p und festes p' ist die einer festen Kombination $(i_1, \dots, i_q)$ entsprechende Zeile $G_{i_1 \dots i_q}(p\, p')$ ein q-Feld w mit den Komponenten $w_{k_1, \dots, k_q} = G_{i_1 \dots i_q, k_1 \dots k_q}$.

Die Greensche Formel (8) weist den Weg zur Konstruktion der gesuchten Lösung $u(p)$ des elektrischen Randwertproblems mittels zweckmäßig gewählter Oberflächenbelegungen. Sei $\varphi = \varphi(s)$ ein stetiges $(q-1)$-Feld und $f = f(s)$ ein ebensolches q-Feld auf $\mathfrak{Q}$; beide seien tangentiell, so daß $\varphi = ([\varphi\nu]\nu)$ und $f = ([f\nu]\nu)$, sonst aber beliebig. Man bilde aus dem q-Feld $w(p) = G_{i_1} \dots {}_{i_q}(p\,p')$ und dem Paar $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi(s), f(s)\}$ dieser beiden Felder den Ausdruck[4])

$$-((w\nu)\cdot\varphi) + ((\mathrm{rot}\, w, \nu)\cdot f), \tag{11}$$

(wobei in w und rot w der variable Flächenpunkt s für p eintritt) und integriere alsdann nach s über ganz $\mathfrak{Q}$: die entstehenden Zahlen $u_{i_1} \dots {}_{i_q}(p')$ sind die Komponenten eines q-Feldes, das sowohl im Innen- wie im Außenraum als Funktion von p' der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügt und im Außenraum der Ausstrahlungsbedingung genügt. Es ist bequem, die Bezeichnungen s, p' gegen s', p zu vertauschen. Wir gebrauchen die Abkürzungen φ, φ' für $\varphi(s)$ und $\varphi(s')$, und analog für alle Funktionen auf $\mathfrak{Q}$. $\Gamma' = \Gamma'(s'\,p)$ bedeutet nunmehr den Vektor $\mathrm{grad}_{p'} G(p'\,p)$ für $p' = s'$. Integration über $\mathfrak{Q}$ nach s oder s' werde durch $\int$ bzw. $\int'$ angedeutet. Das beschriebene Verfahren ergibt den folgenden Ansatz:

$$u(p) = u(p; \boldsymbol{\varphi}) = -\int' [\varphi', \nu']\, G + \int' ([f', \nu']\, \Gamma'). \tag{12}$$

Es gilt, die äußeren Randwerte der Tangentialteile von u und $\mathrm{div}\, u$ zu bestimmen. Da $\Gamma' = -\Gamma$ und somit

$$\int' ([f', \nu']\, \Gamma') = -\,\mathrm{div} \int' [f', \nu']\, G$$

ist, kommt wegen (6):

$$\mathrm{div}\, u = -\int' ([\varphi', \nu']\, \Gamma) = \int' ([\varphi', \nu']\, \Gamma').$$

Um die gesuchten Randwerte an der Stelle s zu finden, errichte man die Normale in s, wähle für p den Punkt auf dieser Normalen, der von s den Abstand $+\varepsilon$ oder $-\varepsilon$ hat, und lasse dann ε gegen 0 konvergieren. Indem wir für einen Augenblick ψ für $[\varphi\nu]$ schreiben, handelt es sich also zunächst darum, den Grenzwert von

$$[\mathrm{div}\, u, \nu] = \int' [(\psi'\, \Gamma')\, \nu]$$

zu ermitteln. Nach (3) ist

$$[(\psi'\, \Gamma')\, \nu] = \psi'(\Gamma'\, \nu) - ([\psi'\, \nu], \Gamma'). \tag{13}$$

Es ist wohl bekannt, was aus dem Integral des ersten Teiles, $\int' \psi'(\Gamma'\, \nu)$, wird, wenn ε gegen 0 strebt, nämlich

$$\pm\, \psi(s) + \int' \psi'(\Gamma'\, \nu).$$

[4]) So verfuhr ich schon in einer frühen Arbeit über die Eigenschwingungen elastischer Körper, Rend. Circ. Mat. di Palermo **39** (1915), 1—49, insbesondere S. 16.

Hier gilt das obere Vorzeichen bei Annäherung von außen, das untere bei Annäherung von innen, und in Γ' ist $p = s$ zu setzen. Der Kern $(\Gamma'(s's), \nu(s))$ ist regulär genug, da wegen der Glattheit der Oberfläche $\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}(s's), \nu(s)\right)$ von positiver Ordnung für $s' = s$ verschwindet. Da die Komponenten von $[\psi'\nu] = [[\varphi'\nu']\nu]$ die Größen ν_i', ν_i nur in der „schiefen" Kombination $\nu_i(s')\nu_k(s) - \nu_k(s')\nu_i(s)$ enthalten, kann im zweiten Teil der Grenzübergang von p zu s unmittelbar ausgeführt werden. Wenn man im Endresultat die Verwandlung (13) wieder rückgängig macht, so erhält man

$$[\operatorname{div} u, \nu](s) = \pm\psi(s) + \int'[(\psi(s'), \Gamma'(s's)), \nu(s)]$$

und damit für den Tangentialteil $(\operatorname{div} u)_t$ von $\operatorname{div} u$ an der Stelle s den Wert

$$\pm\varphi + \int'([([\varphi'\nu']\Gamma')\nu]\nu).$$

Auf genau die gleiche Weise bekommt man für den Tangentialteil u_t von u selber den Wert

$$\pm f + \int'([([f'\nu']\Gamma')\nu]\nu) - \int' G([[\varphi'\nu']\nu]\nu).$$

Sei $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma, g\}$ ein gegebenes Paar bestehend aus einem tangentiellen $(q-1)$-Feld γ und einem tangentiellen q-Feld g auf Ω. Das elektrische Randwertproblem, ein zulässiges Außenfeld $u(p)$ zu finden, für welches auf dem Rande Ω die Tangentialteile von $\operatorname{div} u$ und u bzw. die vorgegebenen Werte γ und g annehmen, ergibt dann das System von Fredholmschen Integralgleichungen

$$(14)\qquad \begin{cases} \gamma = \varphi + \int'([([\varphi'\nu']\Gamma')\nu]\nu), \\ g = f + \int'([([f'\nu']\Gamma')\nu]\nu) - \int' G([[\varphi'\nu']\nu]\nu), \end{cases}$$

die wir symbolisch zu

$$\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K})\boldsymbol{\varphi}$$

zusammenfassen mit dem Einheitsoperator $\boldsymbol{E}$. Wenn γ und g tangentiell sind, sorgt diese Integralgleichung von selbst dafür, daß die Lösung $\{\varphi, f\}$ aus zwei tangentiellen Feldern besteht.

Die Möglichkeit der Existenz von nicht-trivialen Lösungen $\boldsymbol{\eta}$ der homogenen transponierten Gleichung $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K}) = 0$ erfordert das Eingehen auf

§ 6.

Das duale Problem.

Dazu verfolgen wir den zu (12) dualen „magnetischen" Ansatz. Wiederum wählen wir eine stetige Belegung $\boldsymbol{\eta} = \{\eta, e\}$, die aus zwei tangentiellen Feldern η und e auf Ω vom Range $q-1$ bzw. q besteht,

und integrieren diesmal an Stelle von (11) den Ausdruck

$$(\operatorname{div} w \cdot \eta) + (w \cdot e)$$

nach s über $\mathfrak{Q}$, unter w wiederum eine der Zeilen $G_{i_1} \ldots {}_{i_q}(s\,p')$ von (10) verstehend. Wir unterlassen diesmal die Abänderung der Bezeichnung von $s\,p'$ in $s'\,p$. Wir erhalten so die Komponenten $v_{i_1} \ldots {}_{i_q}(p')$ des folgenden q-Feldes

$$v(p') = \int [\eta\,\Gamma] + \int e\,G, \tag{15}$$

wo Γ und G für $\Gamma(s\,p')$ und $G(s\,p')$ stehen. Es genügt als Funktion von p' im Innen- und Außenraum der Schwingungsgleichung, und der Ausstrahlungsbedingung im Außenraum. Jetzt lassen wir den Punkt p' von außen oder innen gegen den Punkt s' von $\mathfrak{Q}$ auf der in s' errichteten Normalen $\nu' = \nu(s')$ rücken. Es ist zu bestimmen, was dabei aus $-(v(p'), \nu')$ und $(\operatorname{rot} v(p'), \nu')$ wird. Was $-(v(p'), \nu')$ anlangt, so ist klar, daß der zweite Summand des Ausdrucks (15) von $v(p')$ zum Grenzwert den Beitrag $-\int (e\,\nu')\,G$ leistet, wo G jetzt für $G(s\,s')$ steht. Im ersten Teil $([\eta\,\Gamma]\,\nu')$ nehme man zunächst wieder die Umwandlung

$$-([\eta\,\Gamma]\,\nu') = -\eta\,(\Gamma\,\nu') + [(\eta\,\nu')\,\Gamma]$$

vor und nutze dann die tangentielle Natur von η aus, indem man η durch $([\eta\,\nu]\,\nu)$ ersetzt; dann hat man mit dem Integral $\int$ von

$$-\eta\,(\Gamma\,\nu') + [(([\eta\,\nu]\,\nu)\,\nu')\,\Gamma]$$

zu tun. Aus dem gleichen Grunde wie früher ergibt sich für dieses Integral im Limes $\mp\,\eta(s')$ plus dem Integral über den gleichen Ausdruck, in dem nun p' durch den Punkt s' auf $\mathfrak{Q}$ ersetzt ist, und aus dem gleichen Grunde ist auch hier der Kern hinreichend regulär. Indem man den Ausdruck in seine ursprüngliche Form zurückverwandelt, erhält man darum

$$-(v\,\nu)' = \mp\,\eta' + \int ([([\eta\,\nu]\,\nu)\,\Gamma']\,\nu') - \int (([e\,\nu]\,\nu)\,\nu')\,G.$$

Dabei ist noch Γ durch $-\Gamma'$ ersetzt worden.

Für ein Feld $v(p')$ wird man unter rot' natürlicherweise den Operator $\operatorname{rot}_{p'}$ verstehen. Wegen

$$\int [\eta\,\Gamma] = -\int [\eta\,\Gamma'] = -\operatorname{rot}' \int \eta\,G$$

ist

$$\operatorname{rot}' v = \int [e\,\Gamma'] = -\int [e\,\Gamma],$$

und durch dieselbe kleine Rechnung, die oben für $[\eta\,\Gamma]$ ausgeführt wurde, kommt

$$(\operatorname{rot}' v, \nu') = \mp\,e' + \int ([([e\,\nu]\,\nu)\,\Gamma']\,\nu').$$

Ist darum $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, l)$ das Paar, das aus den inneren Randwerten von $-(v\,\nu)$ und $(\operatorname{rot} v, \nu)$ besteht, so resultiert die Gleichung

$$\boldsymbol{\lambda} = \eta\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K}).$$

In der Tat ist der Operator, der η in λ überführt, transponiert zu demjenigen, der nach den Gleichungen (14) γ aus φ hervorgehen läßt. Denn gemäß (5) ist ja z. B.

$$(f' \bullet ([[(e\,\nu]\,\nu)\,\Gamma']\,\nu')) = (([[([f'\,\nu']\,\Gamma')\,\nu]\,\nu) \bullet e),$$

da nach jener Gleichung die Vektor Faktoren von e in umgekehrter Reihenfolge an f' angehängt werden können, indem man jede runde in eine eckige, jede eckige in eine runde Klammer verwandelt. Die Gleichung

$$\eta\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K}) = 0 \tag{16}$$

bedeutet also, daß für $v(p) = v(p;\,\eta)$ die inneren Randwerte von $-(v\,\nu)$ und (rot v, ν) verschwinden. Auf jeden Fall erleiden diese Größen den Sprung $-2\,i$ bzw. $-2e$ beim Durchgang durch die Fläche Ω von innen nach außen.

§ 7.

Der Operator M und die Kapazitätsmatrix.

Die Lösungen φ, η von $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K})\varphi = 0$ bzw. $\eta\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K}) = 0$ bilden lineare Mannigfaltigkeiten Φ und H von derselben Dimension h. Es sei p' ein Punkt im Äußern W. Dann ist $G(p\,p')$ als Funktion von p eine reguläre Lösung der Schwingungsgleichung für $p \in V$. Wir wenden die Gleichung (8) an auf das q-Feld $w(p) = G_{i_1 \ldots i_q}(p\,p')$, das an Stelle von u tritt, und das q-Feld $v(p) = v(p;\,\eta)$, das mittels der H entnommenen Belegung η durch (15) definiert ist. Wir werden im nächsten Paragraphen zeigen, daß die Randwerte f und φ der Tangentialteile von v und div v existieren und auf der Innen- und Außenseite von Ω die gleichen Werte haben. M bedeutet den linearen Operator, durch den η in $\varphi = \{\varphi, f\}$ übergeht, $\varphi = M\eta$. Berücksichtigt man, daß die inneren Randwerte von $-(v\,\nu)$ und (rot v, ν) verschwinden, so ergibt unsere Gleichung

$$\int \{-((w\,\nu)\cdot\varphi) + ((\text{rot } w,\,\nu)\cdot f)\} = 0$$

oder

$$u(p;\,\varphi) = 0 \quad \text{für } \varphi = M\eta,\ \eta \in H \text{ und } p \in W.$$

Läßt man jetzt p von außen in einen Flächenpunkt s hineinrücken, so kommt

$$(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K})\varphi = 0.$$

Verfährt man in gleicher Weise mit $\bar{v}(p)$, so zeigt sich, wie Herr Müller zuerst bemerkte, daß nicht nur $\varphi = M\eta$, sondern auch das konjugierte $\overline{\varphi}$ derselben Gleichung genügt.

Sind $\eta = \{\eta, e\}$, $\varphi = \{\varphi, f\}$ irgend zwei Belegungen von der hier durchgehend benutzten Art, die erste als Zeile, die zweite als Spalte

aufgefaßt, so kann man das innere Produkt

$$(\eta, \varphi) = \int (\eta \cdot \varphi) + \int (e \cdot f)$$

bilden. Aus zwei Belegungen η, η^* von der Art wie η entsteht die Bilinearform

$$C(\eta, \eta^*) = (\eta, M\eta^*).$$

Ihre *Symmetrie* beweist man am besten, indem man die Greensche Formel (8) auf $v = v(p; \eta)$ und $v^* = v(p; \eta^*)$ anwendet, nicht jedoch für V, sondern für das Innere der Kugel Σ_R. Sobald der Radius R so groß ist, daß Σ_R ganz V umschließt, erhält man dann, bedenkend, daß $-(v\nu)$ und $(\text{rot } v, \nu)$ den Sprung -2η bzw. $-2e$ über Ω hinüber erleiden, während $\varphi = (\text{div } v)_t$ und $f = v_t$ stetig hindurchgehen, eine Gleichung, durch welche $2\{(\eta, M\eta^*) - (\eta^*, M\eta)\}$ in das über Σ_R sich erstreckende Integral von $\mathfrak{L}(v, v^*)$ verwandelt wird. Schreibt man hier $\mathfrak{L}(v, v^*)$ in der Form

$$\begin{aligned}(17)\qquad &((v\nu), (\text{div } v^*)_t + ik(v^*\nu)) + (v_t, (\text{rot } v^*\nu) + ikv_t^*)\\ &-((v^*\nu), (\text{div } v)_t + ik(v\nu)) - (v_t^*, (\text{rot } v, \nu) + ikv_t),\end{aligned}$$

so ergibt sich aus den Ausstrahlungsbedingungen, daß $\int_{\Sigma_R} \mathfrak{L}(v\,v^*)\,ds$ mit $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert, folglich

$$(18)\qquad (\eta, M\eta^*) - (\eta^*, M\eta) = 0.$$

Das entsprechende Verfahren für v und $\bar{v}$ liefert zunächst

$$2(\eta, \overline{M\eta}) - 2(\bar{\eta}, M\eta) = \int_{\Sigma_R} \mathfrak{L}(v, \bar{v})\,ds.$$

Parallel zu (17) bildet man[5])

$$\begin{aligned}(19)\qquad &((v\nu), (\text{div } \bar{v})_t - ik(\bar{v}\nu)) + (v_t, (\text{rot } \bar{v}, \nu) - ik\bar{v}_t)\\ &-((\bar{v}\nu), (\text{div } v)_t + ik(v\nu)) - (\bar{v}_t, (\text{rot } v, \nu) + ikv_t).\end{aligned}$$

Gemäß der Ausstrahlungsbedingung konvergiert das Integral dieses Ausdrucks über Σ_R mit $R \to \infty$ gegen Null, somit

$$k \cdot \int_{\Sigma_R} |v|^2\,ds \to 2 \cdot \mathfrak{J}(\eta, \overline{M\eta}).$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$(20)\qquad \mathfrak{J}(\eta, \overline{M\eta}) \geqq 0,$$

und nach Rellichs Lemma kann hier das Gleichheitszeichen nur gelten, wenn $v(p)$ in ganz W verschwindet; diese Bedingung hat das Ver-

[5]) Dieser Gedanke rührt von Herrn Müller her, nur benutzt er statt (19) den Rellichschen Ausdruck (9) für v.

schwinden der *äußeren* Randwerte von $-(\nu\, r)$ und $(\mathrm{rot}\ r, \nu)$ oder die Gleichung

$$\eta(-\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}) = 0 \tag{21}$$

zur Folge.

Die Beziehungen (18), (20) samt diesem Zusatz gelten unabhängig davon, ob η zu H gehört. Ist aber $\eta(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}) = 0$, so führt (21) auf $\eta = 0$. Für die Elemente η von H gilt somit

$$\mathfrak{J}(\eta, \overline{M\eta}) > 0 \text{ außer für } \eta = 0. \tag{20*}$$

Diese Ungleichung lehrt, daß $M\eta$ für $\eta \in H$ nur dann Null sein kann, wenn $\eta = 0$ ist, und darum ist die Abbildung $\eta \to \varphi = M\eta$ von H auf Φ ein-eindeutig. Aus einer Basis η_i $(i = 1, \ldots, h)$ von H entspringt darum eine Basis $\varphi_i = M\eta_i$ für Φ. Es gilt der fundamentale

Satz: *Die Kapazitätsmatrix der* $c_{ij} = (\eta_i \varphi_j)$ *ist nicht-ausgeartet.*

Zum Beweise muß man zeigen, daß $\eta = 0$ die einzige Linearkombination der η_i ist, die zu allen φ_j orthogonal ist. Da $\overline{M\eta}$ zu Φ gehört, folgt aus $(\eta\varphi_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, h)$ in der Tat $(\eta, \overline{M\eta}) = 0$, was der Ungleichung (21*) widerspricht, es sei denn $\eta = 0$.

Danach führt das klassische Vorgehen zur Lösung der elektrischen Randwertaufgabe: Von dem gegebenen γ subtrahiert man ein solches Element $\Sigma\alpha_j\varphi_j$ von Φ, daß die Differenz γ^* zu allen η_i orthogonal ist,

$$(\eta_i\gamma) = \Sigma_j c_{ij}\alpha_j \qquad (i, j = 1, \ldots, h).$$

Für γ^* hat die inhomogene Integralgleichung $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})\varphi^* = \gamma^*$ eine Lösung φ^*. Zum „elektrischen Schwingungspotential" $u^*(p) = u(p; \varphi^*)$ der so gefundenen Belegung φ^* addiert man das magnetische Potential $v(p; \eta)$ der H entnommenen Belegung $\eta = \Sigma_j \alpha_j \eta_j$. Die Summe $u(p)$ ergibt die gewünschten äußeren Randwerte $\{\gamma, g\}$ für $(\mathrm{div}\, u)_t$ und u_t.

§ 8.

Die Randwerte von v_t und $(\mathrm{div}\, v)_t$.

Ein heikler Punkt, der im Falle $q = 0$ noch nicht auftaucht, ist der Nachweis der Existenz und des stetigen Durchgangs der tangentiellen Teile v_t und $(\mathrm{div}\, v)_t$ des im Innen- und Außenraum durch (15) bestimmten Potentials v. In der Tat, für $q = 0$ hat man einfach

$$v(p') = \int e(s)\, G(s\, p'),$$

und es ist sofort klar, daß die Randwerte von v auf der Innen- und Außenseite durch $v(s') = \int e(s)\, G(s\, s')$ gegeben sind. Für $q \geqq 1$ erfordert die Bestimmung des Oberflächenwertes des tangentialen Teils von $\int' [\eta' \Gamma]$ eine zusätzliche Überlegung, die aber aus der klassischen Potentialtheorie wohlbekannt ist. Wenn p längs der Normalen in s

in den Oberflächenpunkt s hineinrückt, ergibt sich von innen und außen der gleiche Limes, nämlich der *Hauptwert* des uneigentlichen Integrals

$$\int' ([[\eta(s'),\ \Gamma(s's)],\ \nu(s)]\,\nu(s)).$$

Dabei wird es dann freilich nötig, von $\eta(s)$ vorauszusetzen, daß es nicht nur stetig ist, sondern auch einer HÖLDER-Bedingung genügt. Der Hauptwert des Integrals über $\mathfrak{Q}$ wird bestimmt, indem man aus $\mathfrak{Q}$ um den Punkt s zunächst ein kleines *kreisförmiges* Loch ausstanzt, dessen Radius ε man dann gegen 0 gehen läßt. Genauer gesagt: in der Tangentenebene im Punkte s von $\mathfrak{Q}$ beschreibt man um s einen $(n-1)$-dimensionalen Kreis vom Radius ε und errichtet über ihm in Richtung der Normalen ν einen geraden Kreiszylinder; dieser wird zum Ausstanzen des Loches benutzt.

Die Rechnung gestaltet sich am einfachsten, wenn man s als den Ursprung des Koordinatensystems annimmt und der x_n-Achse die Richtung der Normalen ν gibt, $\nu = (0, \ldots, 0, 1)$. Dann besteht $[\eta'\Gamma]_t$ aus denjenigen Komponenten

$$[\eta'\Gamma]_{i_1 \ldots i_q} = \frac{1}{r}\frac{dG}{dr}\,\mathbf{S} \pm \eta'_{i_1 \ldots i_{q-1}} x'_{i_q}$$

von $[\eta'\Gamma]$, in denen alle Indizes $i_1, \ldots, i_q \neq n$ sind. Daraus ergibt sich sofort das gewünschte Resultat. Ohne Normierung des Koordinatensystems kann man das Argument auch darauf stützen, daß jede Komponente $i_1, \ldots, i_{q-1}, i, k$ von $[[\eta'\Gamma]\nu]$ die Vektoren Γ und ν nur in einer der schiefen Kombinationen $\Gamma_i \nu_k - \Gamma_k \nu_i$ enthält.

Für $q \geq 1$ ist ferner der Oberflächenwert von $(\mathrm{div}\ v)_t$ zu bestimmen. Hier ziehen wir zunächst vor, die Bezeichnung sp' beizubehalten und nicht mit $s'p$ zu vertauschen. Wir operieren also mit $v(p')$ und schreiben z. B. $\mathrm{div}_{p'} v(p')$ als $\mathrm{div}' v$. Zu dieser Divergenz liefert der Teil $\int e\,G$ von $v(p')$ den Beitrag $\int (e\,\Gamma') - \int (e\,\Gamma)$. Führt man $[e\,\nu] = c$ ein, so ist $(e\,\Gamma) = ((c\,\nu)\,\Gamma)$, und dies ist wiederum ein Ausdruck, der ν und Γ nur in der schiefen Kombination $\nu_i \Gamma_k - \nu_k \Gamma_i$ enthält. Setzt man also voraus, daß e und darum auch c einer HÖLDER-Bedingung genügt, so ergibt sich als Grenzwert von $\int (e\,\Gamma')$ der Hauptwert des Integrals

$$\int ((c(s)\,\nu(s))\,\Gamma'(s\,s')),$$

wenn p' auf der Normalen ν' in s' dem Oberflächenpunkt s' zustrebt, ob dies nun von der Innen- oder Außenseite her geschieht.

Bleibt noch der Beitrag zu diskutieren, den der Teil $\int [\eta\,\Gamma]$ von $v(p')$ zu $\mathrm{div}' v$ liefert. Hier hat man es mit der gleichen Schwierigkeit zu tun, auf die man in der klassischen dreidimensionalen Potentialtheorie bei der normalen Ableitung des Potentials einer Doppelbelegung

stößt. Ich verfahre so, wie ich es seit langem in Vorlesungen über Potentialtheorie zu tun pflegte. Es ist

$$\int [\eta \Gamma] = -\int [\eta(s), \Gamma'(s\,p')] = -\operatorname{rot}' \int (\eta(s) \cdot G(s\,p')).$$

Darum ist $\operatorname{div}' \int [\eta \Gamma] = -\operatorname{div}' \operatorname{rot}' \int (\eta G)$; da aber $\operatorname{div} \operatorname{rot} = \Delta - \operatorname{rot} \operatorname{div}$ und $\Delta' G = -k^2 G$ ist, so kommt

$$\operatorname{div}' \int [\eta \Gamma] = k^2 \cdot \int (\eta G) + \operatorname{rot}' \int (\eta \Gamma'). \tag{22}$$

Was mit dem ersten Summanden rechts geschieht, wenn p' in den Oberflächenpunkt s' hineinrückt, ist klar: er geht in

$$k^2 \cdot \int \eta(s)\, G(s\,s')\, d\,s$$

über.

Wir untersuchen jetzt das nur für $q \geqq 2$ auftretende zweite Glied in (22), $\int (\eta \Gamma') = -\int (\eta \Gamma) = -\int ((\vartheta \nu) \Gamma)$, wo $\vartheta = [\eta \nu]$. Um das über eine geschlossene Oberfläche Ω sich erstreckende Integral zu berechnen, bedeckt man die Fläche „dachziegel-artig" mit sich überlappenden Gebieten, die je auf ein Koordinatensystem $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ bezogen sind. Man kann dann ϑ additiv in Bestandteile zerlegen (Dieudonné), deren jedes nur in einem der Stücke, genauer in einem kompakten „Kern" eines solchen Stückes verschwindet. Sei $x_i = x_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ die Parameterdarstellung der Fläche in dem von dem Parametersystem ξ bedeckten Stück. Wir haben angenommen, daß diese Darstellungsfunktionen $x_i(\xi)$ stetig differentiierbar sind, daß die Ableitungen einer Hölder-Bedingung genügen und daß die Jacobische Matrix

$$\left\| \frac{\partial x_1}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right\|,$$

— die aus der hingeschriebenen Zeile entsteht, indem man $n-1$ Zeilen untereinander schreibt, in welchen ξ durch $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ ersetzt ist —, vom Maximalrang $n-1$ sei. Das ist, was wir eine glatte Fläche nannten. Wir fügen jetzt die Voraussetzung hinzu, daß auch die zweiten Ableitungen von $x_i(\xi)$ existieren und einer Hölder-Bedingung genügen. Wir sprechen dann von einer *glatt-gekrümmten* Fläche. Es gilt z. B. (richtige Orientierung des Systems $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ vorausgesetzt)

$$\nu_1\, d\,s = \left| \frac{\partial x_2}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right| \cdot d\,\xi_1 \ldots d\,\xi_{n-1}.$$

So ergibt sich für $(\nu_1 \Gamma_2 - \nu_2 \Gamma_1) \cdot d\,s$ der Ausdruck

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right| \cdot d\,\xi_1 \ldots d\,\xi_{n-1}.$$

Indem man zu der ersten Spalte dieser Determinante die bzw. mit $\frac{\partial G}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_n}$ multiplizierten folgenden Spalten hinzuaddiert, verwandelt sie sich in

$$\left| \frac{\partial G}{\partial \xi}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right|.$$

Ich nehme jetzt an, daß η und darum auch ϑ als Funktion der ξ differentiierbar ist und die Ableitungen einer HÖLDER-Bedingung genügen. Dann kann man auf das Integral

$$(23) \qquad \int \vartheta_{i_1 \ldots i_{q-2}\,12} \cdot \left| \frac{\partial G}{\partial \xi}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right| \cdot d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}$$

partielle Integration so anwenden, daß G von der Differentiation befreit wird. Auf diese Weise verwandelt sich (23) in

$$-\int G \cdot \left| \frac{\partial \vartheta_{i_1 \ldots i_{q-2}\,12}}{\partial \xi}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right| \cdot d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}.$$

Schreibt man

$$(24) \qquad \mu_{i_1 \ldots i_{q-2}}(s)\, ds = \mathbf{S} \pm \left| \frac{\partial \vartheta_{i_1 \ldots i_{q-2}\,12}}{\partial \xi}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \right| \cdot d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1},$$

wo die Summe sich alternierend über die $n(n-1)/2$ Mischungen der Ziffern 1, 2 mit 3, ..., n erstreckt, so erhält man

$$(25) \qquad \int (\eta\, \Gamma') = \int \mu(s) \cdot G(s\,p') \cdot ds = \int \mu\, G.$$

In Wahrheit bezieht sich die Zwischenrechnung auf ein durch die Koordinaten ξ bedecktes Stück von $\mathfrak{Q}$ und den zugehörigen Bestandteil von ϑ. Aber wegen der Invarianz des durch (24) eingeführten μ gegenüber Transformationen der Koordinaten ξ ist im Endresultat (25) die Zerstückelung von $\mathfrak{Q}$ und ϑ wieder überwunden.

In diesem Stadium finden wir es zweckmäßig, die Bezeichnung $s\,p'$ wieder gegen $s'\,p$ zu vertauschen. Es handelt sich dann darum, während p auf der Normalen ν im Flächenpunkt s gegen s rückt, den Grenzwert des tangentiellen Teils von rot $\int'(\mu' G) = \int' [\mu' \Gamma]$ zu ermitteln $[G = G(s'\,p),\ \Gamma = \Gamma(s'\,p)]$. Das geschieht genau so, wie vorhin für $\int' [\eta' \Gamma]$ verfahren wurde. Das Resultat ist der Hauptwert des Integrals $\int' [\mu(s'), \Gamma(s'\,s)]_t$.

Genügt η der Gleichung $\eta(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K}) = 0$, so ist $\eta = -\eta\,\boldsymbol{K} = \eta\,\boldsymbol{K}^2 = \ldots$, und daraus schließt man leicht, daß η unsern Forderungen genügt, unter der oben gemachten Voraussetzung, daß $\mathfrak{Q}$ glatt-gekrümmt ist.

§ 9.

Schlußbemerkungen.

Wird in der elektrischen Randwertaufgabe $\gamma(s) = 0$ angenommen, so erfüllt die Divergenz $v = \operatorname{div} u$ der im Außenraum konstruierten

zulässigen Lösung $u(p)$ die Randbedingung $w_t = 0$ auf Ω. Außerdem ist $\operatorname{div} w = 0$ in ganz W. Da man aus dem Ausdruck von u entnimmt, daß auch w der Ausstrahlungsbedingung

$$R^{\frac{n-1}{2}} \{(\operatorname{rot} w, \nu) + i k w_t\}_{\text{auf } \Sigma_R} \to 0 \text{ mit } R \to \infty$$

genügt, so ergibt sich nach dem auf w anzuwendenden Eindeutigkeits-Argument, daß w im Außenraum identisch verschwindet, $\operatorname{div} u = 0$. Damit reduziert sich die Schwingungsgleichung auf $\operatorname{div} \operatorname{rot} u + k^2 u = 0$. Ohne diese Bemerkung wäre die Behandlung des elektromagnetischen Feldes unvollständig.

(Eingegangen am 16. April 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 120—121 (1952).

Beweis des Satzes über die Vertauschbarkeit der Differentiationen.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

Rolf Nevanlinna in Helsinki (Finnland).

1. Dieser Satz ist bekanntlich von H. A. Schwarz in folgender Fassung gegeben und bewiesen worden:

Sei $f(x, y)$ eine in der Umgebung von $x = a$, $y = b$ erklärte, nebst ihren ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y stetige Funktion. Falls die zweite Ableitung f_{xy} in der Umgebung von (a, b) existiert und im Punkte (a, b) stetig ist, so existiert f_{yx} in (a, b), und es gilt in diesem Punkte

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Im folgenden soll eine einfache Beweisvariante gegeben werden.

2. Beweis. — Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung ein $\varrho_\varepsilon > 0$, so daß für $|x - a| \leqq \varrho_\varepsilon$, $|y - b| \leqq \varrho_\varepsilon$ erstens die Stetigkeit von f, f_x, f_y erfüllt ist und zweitens[1])

$$f_{xy}(x, y) = f_{xy}(a, b) + \langle\varepsilon\rangle. \tag{1}$$

Seien h, k zunächst fest so gewählt, daß $0 < |h| < \varrho_\varepsilon$, $0 < |k| < \varrho_\varepsilon$. Wir betrachten das Rechteck mit dem Rand $R = P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$, wo $P_1 = (a, b)$, $P_2 = (a + h, b)$, $P_3 = (a + h, b + k)$, $P_4 = (a, b + k)$, $P_5 = P_1$. Dann ist

$$\int_R f_x\, dx + f_y\, dy = \sum_{\nu=1}^{4} (f(P_{\nu+1}) - f(P_\nu)) = 0. \tag{2}$$

Nach dem Mittelwertsatz wird für $0 \leqq |x - a| \leqq |h|$, mit Rücksicht auf (1),

$$f_x(x, b + k) - f_x(x, b) = f_{xy}(x, b + \Theta k)\, k = k\,(f_{xy}(a, b) + \langle\varepsilon\rangle),$$

wo $0 < \Theta < 1$, und also

$$-\int_R f_x\, dx = \int_{x=a}^{a+h} (f_x(x, b + k) - f_x(x, b))\, dx = h\,k\,(f_{xy}(a, b) + \langle\varepsilon\rangle). \tag{3}$$

Andererseits ist nach dem Mittelwertsatz (der Integralrechnung)

$$\begin{aligned} \int_R f_y\, dy &= \int_{y=b}^{b+h} (f_y(a + h, y) - f_y(a, y))\, dy \\ &= k\,(f_y(a + h, b + \Theta' k) - f_y(a, b + \Theta' k)), \end{aligned} \tag{4}$$

[1]) $\langle\varepsilon\rangle$ bezeichnet im folgenden jede Zahl mit einem Betrag $< \varepsilon$.

wo $0 < \Theta' < 1$. Aus (2), (3) und (4) folgt, daß

$$\frac{f_y(a+h, b+\Theta' k) - f_y(a, b+\Theta' k)}{h} = f_{xy}(a, b) + \langle \varepsilon \rangle$$

für jedes h und k mit $0 < |h| < \varrho_\varepsilon$, $0 < |k| < \varrho_\varepsilon$ gilt.

Bei festem h lasse man jetzt $k \to 0$ konvergieren. Dann wird, wegen der Stetigkeit der linken Seite für $k = 0$,

$$\frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h} = f_{xy}(a, b) + \langle \varepsilon \rangle$$

für $0 < |h| < \varrho_\varepsilon$: d. h. es existiert $f_{yx}(a, b)$ und es ist $f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 2. April 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 122—130 (1952).

Bemerkungen über die Verteilung der quadratischen Reste.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Einleitung.

Im folgenden bedeutet p eine ungerade Primzahl; alle Gleichheiten sind als Kongruenzen modulo p zu verstehen. Das Wort Rest bedeutet quadratischer Rest (mod p), entsprechend Nichtrest.

Die Menge R der $\frac{p-1}{2}$ Reste hat folgende Eigenschaften. Wenn man alle Zahlen von R mit ein und derselben Zahl aus R multipliziert, entsteht wieder die Menge R. Wenn man sie mit ein und demselben Nichtrest multipliziert, entsteht die Menge aller Nichtreste. Durch die ersterwähnte Eigenschaft ist die Menge R bereits eindeutig festgelegt, das heißt: Wenn eine Menge M von $\frac{p-1}{2}$ zu p relativ primen Zahlen die Eigenschaft hat, daß sie durch Multiplikation mit einer beliebigen Zahl aus M sich stets reproduziert, so ist M die Menge der Reste. Denn die Menge *aller* $p-1$ zu p relativ primen Zahlen bildet für die Multiplikation eine zyklische Gruppe, und die Menge M wird durch die geforderte Eigenschaft als Untergruppe vom Index 2 charakterisiert; aber da kann es nur *eine* geben und das ist eben die Menge der Reste.

Obwohl nun die Reproduktion durch Multiplikation die Menge der Reste eindeutig festlegt, so gibt diese Eigenschaft doch keinerlei Aufschluß über die Verteilung der Reste innerhalb der Zahlenreihe. Einen gewissen Einblick in diese Verteilung wird man aber gewinnen, wenn man sich fragt, was aus R entsteht, wenn man zu jeder Zahl von R ein und dieselbe Zahl *addiert*; wieviel Reste und wieviel Nichtreste werden dabei herauskommen? Die Antwort auf diese Frage ist überraschend einfach. Dabei empfiehlt es sich, im Gegensatz zu dem sonst in der Zahlentheorie Zweckmäßigen, auch die Zahl 0 zu den Resten zu rechnen; schließlich gehört ja auch 0 zu den Zahlen a, für welche die Kongruenz $x^2 \equiv a$ lösbar ist.

§ 2.

Formulierung der Sätze.

Satz 1. Sei $p = 4k - 1$. Sind dann

$$r_1, r_2, \ldots, r_{2k}$$

die $2k$ Reste (inklusive 0) und ist a eine beliebige zu p prime Zahl, so sind unter den $2k$ Zahlen

$$r_1 + a, r_2 + a, \ldots, r_{2k} + a$$

stets k Reste (eventuell 0 dabei) und k Nichtreste.

Satz 2. Sei $p = 4k - 1$. Sind dann

$$n_1, n_2, \ldots, n_{2k-1}$$

die $2k - 1$ Nichtreste und ist a eine beliebige zu p prime Zahl, so sind unter den $2k - 1$ Zahlen

$$n_1 + a, n_2 + a, \ldots, n_{2k-1} + a$$

stets k Reste (eventuell 0 dabei) und $k - 1$ Nichtreste.

Satz 3. Sei $p = 4k + 1$. Sind dann

$$r_1, r_2, \ldots, r_{2k+1}$$

die $2k + 1$ Reste (inklusive 0) und ist a eine zu p prime Zahl, so sind unter den $2k + 1$ Zahlen

$$r_1 + a, r_2 + a, \ldots, r_{2k+1} + a,$$

falls a selbst Rest ist, $k + 1$ Reste (eventuell 0 dabei)[1]) und k Nichtreste. Wenn aber a Nichtrest. so sind es umgekehrt k Reste (eventuell 0 dabei)[2]) und $k + 1$ Nichtreste.

Satz 4. Sei $p = 4k + 1$. Sind dann

$$n_1, n_2, \ldots, n_{2k}$$

die $2k$ Nichtreste und ist a eine zu p prime Zahl, so sind unter den $2k$ Zahlen

$$n_1 + a, n_2 + a, \ldots, n_{2k} + a,$$

falls a Rest ist, k Reste (eventuell 0 dabei)[3]) und k Nichtreste. Wenn aber a Nichtrest ist, sind es $k + 1$ Reste (eventuell 0 dabei)[4]) und $k - 1$ Nichtreste.

---

[1]) 0 ist sogar *stets* dabei, weil für $p = 4k + 1$ mit a stets auch $-a$ Rest ist, so daß unter den r_ν die Zahl $-a$ vorkommt.

[2]) Diesmal ist 0 in Wahrheit *nie* dabei, weil mit a stets auch $-a$ Nichtrest ist, so daß unter den r_ν die Zahl $-a$ nicht vorkommt.

[3]) In Wahrheit ist 0 *nie* dabei; Begründung wie vorhin.

[4]) 0 ist sogar *stets* dabei; Begründung wie vorhin.

§ 3.

Beweise.

Es wird genügen, die Sätze 1 und 3 zu beweisen. Denn Satz 2 folgt ja, weil die p Zahlen

$$r_1 + a, \ldots, r_{2k} + a, n_1 + a, \ldots, n_{2k-1} + a$$

ein volles System inkongruenter Zahlen bilden, sofort aus Satz 1. Ebenso folgt Satz 4 sofort aus Satz 3, da jetzt die p Zahlen

$$r_1 + a, \ldots, r_{2k+1} + a, n_1 + a, \ldots, n_{2k} + a$$

ein volles System inkongruenter Zahlen bilden.

Die Beweise für Satz 1 und 3 lassen sich ein Stück weit gemeinsam führen. Wir setzen $r_\nu \equiv s_\nu^2$. Damit dann $r_\nu + a$ ein Rest, also etwa $\equiv t_\nu^2$ ist, muß $s_\nu^2 + a \equiv t_\nu^2$ sein, also

$$s_\nu^2 - t_\nu^2 \equiv -a, \quad s_\nu - t_\nu \equiv -\frac{a}{s_\nu + t_\nu}, \quad 2\,s_\nu \equiv s_\nu + t_\nu - \frac{a}{s_\nu + t_\nu}.$$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß $s_\nu^2 + a$ Rest ist, besteht also darin, daß es eine zu p prime Zahl u gibt, für die

$$(1) \qquad s_\nu \equiv \frac{1}{2}\left(u - \frac{a}{u}\right)$$

ist. Die Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn wenn (1) gilt und man setzt noch $\frac{1}{2}\left(u + \frac{a}{u}\right) \equiv t$, so ist

$$u \equiv t + s_\nu, \quad \frac{a}{u} \equiv t - s_\nu,$$

also durch Multiplikation

$$a \equiv t^2 - s_\nu^2, \quad s_\nu^2 + a \equiv t^2,$$

so daß $s_\nu^2 + a$ in der Tat Rest ist.

Die Zahl $r_\nu + a$ wird also dann und nur dann Rest sein, wenn es eine zu p prime Zahl u gibt derart, daß

$$r_\nu \equiv \frac{1}{4}\left(u - \frac{a}{u}\right)$$

ist. Unter den Zahlen $r_\nu + a$ gibt es also soviel Reste, wie es inkongruente Zahlen der Form $\left(u - \frac{a}{u}\right)^2$ gibt. *Zum Beweis von Satz 1 ist also zu zeigen, daß es für $p = 4k - 1$ genau k inkongruente Zahlen dieser Form gibt; und zum Beweis von Satz 3 ist zu zeigen, daß es für $p = 4k + 1$ genau $k + 1$ oder k Zahlen dieser Form gibt, je nachdem a Rest oder Nichtrest ist.*

Nun hat bei gegebenem u die Kongruenz

$$(2) \qquad \left(v - \frac{a}{v}\right)^2 \equiv \left(u - \frac{a}{u}\right)^2$$

die vier Lösungen

$$(3) \qquad v \equiv u, \quad v \equiv -u, \quad v \equiv \frac{a}{u}, \quad v \equiv -\frac{a}{u}$$

und keine anderen. Diese sind voneinander verschieden, außer wenn einmal $u \equiv \frac{a}{u}$ oder $u \equiv -\frac{a}{u}$ ist. In diesen Fällen sind je zwei der Lösungen (3) einander gleich, so daß es nur zwei verschiedene sind[5]).

Jetzt trennen sich die Beweise für Satz 1 und 3. Im Fall von Satz 1 ist $p = 4k-1$, also eine der beiden Zahlen $\pm a$ Rest, die andere Nichtrest. Wenn a Rest ist, gibt es zwei Zahlen $u_1, -u_1$, für die $u \equiv \frac{a}{u}$ ist, und keine, für die $u \equiv -\frac{a}{u}$ ist. Wenn aber $-a$ Rest ist, gibt es zwei Zahlen $u_1, -u_1$, für die $u \equiv -\frac{a}{u}$ ist, und keine, für die $u \equiv \frac{a}{u}$ ist.

Läßt man daher in dem Ausdruck $\left(u - \frac{a}{u}\right)^2$ die Zahl u alle $p-1 = 4k-2$ zu p prime Zahlen durchlaufen, so wird man zweimal die Zahl $\left(u_1 - \frac{a}{u_1}\right)^2$ erhalten, nämlich für $u \equiv u_1$ und für $u \equiv -u_1$. Unter den $4k-2-2$ anderen werden je vier einander gleich sein. Die Anzahl der inkongruenten ist also

$$1 + \frac{4k-4}{4} = k,$$

womit Satz 1 bewiesen ist.

Im Fall von Satz 3 ist $p = 4k+1$ und man muß unterscheiden, ob a Rest oder Nichtrest ist. Wenn a und folglich auch $-a$ Nichtrest ist, sind die vier Lösungen (3) der Kongruenz (2) alle voneinander verschieden. Läßt man also in dem Ausdruck $\left(u - \frac{a}{u}\right)^2$ die Zahl u alle $p-1 = 4k$ zu p prime Zahlen durchlaufen, so wird jede Zahl, die überhaupt kommt, genau viermal kommen. Die Anzahl der inkongruenten ist also $\frac{4k}{4} = k$, womit dieser Fall erledigt ist.

Wenn aber a und folglich auch $-a$ Rest ist, so gibt es zwei Zahlen $u_1, -u_1$, für welche $u \equiv \frac{a}{u}$ ist, und ebenso zwei Zahlen $u_2, -u_2$, für welche $u \equiv -\frac{a}{u}$ ist. Läßt man also in dem Ausdruck $\left(u - \frac{a}{u}\right)^2$ die Zahl u

[5]) Auch im Fall $u \equiv -u$ scheint sich die Zahl der Lösungen zu verringern, aber in Wahrheit gibt es diesen Fall gar nicht, weil ja u relativ prim zu p sein muß.

wieder alle $p-1 = 4k$ zu p prime Zahlen durchlaufen, so erhält man jede der beiden inkongruenten[6]) Zahlen

$$\left(u_1 - \frac{a}{u_1}\right)^2, \quad \left(u_2 - \frac{a}{u_2}\right)^2$$

zweimal, und unter den anderen $4k-4$ Zahlen wird jede, die überhaupt kommt, genau viermal kommen. Die Anzahl der inkongruenten ist also

$$2 + \frac{4k-4}{4} = k+1,$$

womit auch dieser Fall von Satz 3 erledigt ist.

§ 4.

Folgerungen.

Die bewiesenen Sätze gestatten, über die Verteilung der Reste und Nichtreste schon Wesentliches auszusagen. So läßt sich aus Satz 1 und 2, indem man speziell $a = 1$ nimmt, sofort folgendes ablesen:

Satz 5. Im Fall $p = 4k-1$ gibt es genau k Paare aufeinander folgender Reste (inklusive das Paar 0,1) und $k-1$ Paare aufeinander folgender Nichtreste.

Für $p = 4k+1$ ist zu beachten, daß $p-1$ quadratischer Rest ist, und da ihm die Zahl $p(\equiv 0)$ folgt, stellt $p-1,0$ ein Paar aufeinander folgender Reste dar. Aus Satz 3 und 4 folgt dann unmittelbar

Satz 6. Im Fall $p = 4k+1$ gibt es genau $k+1$ Paare aufeinander folgender Reste (inklusive die Paare 0,1 und $p-1,0$) und k Paare aufeinander folgender Nichtreste.

Die Sätze 5 und 6 finden sich schon, wie ich dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Jahrgang 1896, S. 146 entnehme, in einer mir unzugänglichen russisch geschriebenen Arbeit von N. Aladow (Math. Sammlung der Math. Gesellschaft Moskau **18**, 61—75).

Versteht man unter der „Länge" eines Reste- oder Nichtrestepaares b, c die kleinste positive Zahl, die zu einer der Zahlen $b-c$ oder $c-b$ kongruent ist, so daß jede Länge $\leqq \frac{p-1}{2}$ ist, so folgt aus Satz 1 und 2 sofort

Satz 7. Im Fall $p = 4k-1$ gibt es zu jeder vorgegebenen Länge a genau k Restepaare und $k-1$ Nichtrestepaare.

Für $p = 11$, also $k = 3$ sind z. B.

(0,4), (1,5), (5,9) die drei Restepaare,
(2,6), (6,10) die zwei Nichtrestepaare

der Länge 4.

---

[6]) Wären sie kongruent, so wäre $u_2 \equiv u_1$ oder $-u_1$ oder $\frac{a}{u_1}$ oder $-\frac{a}{u_1}$, was aber wegen $u_1 \equiv \frac{a}{u_1}$, $u_2 \equiv -\frac{a}{u_2}$ alles nicht möglich ist.

Weiter folgt aus Satz 3 und 4:

Satz 8. Im Fall $p = 4k+1$ gibt es zu einer vorgegebenen Länge a, falls a Rest ist, genau $k+1$ Restepaare und k Nichtrestepaare; falls a Nichtrest ist, gibt es genau k Restepaare und $k-1$ Nichtrestepaare.

Für $p = 13$, also $k = 3$, gibt es z. B. zur Länge 3, weil 3 Rest ist,

vier Restepaare: (0,3), (1,4), (9,12), (10,0)
und drei Nichtrestepaare: (2,5), (5,8), (8,11).

Zur Länge 5 aber gibt es, weil 5 Nichtrest ist,

nur drei Restepaare: (4,9), (9,1), (12,4)
und zwei Nichtrestepaare: (2,7), (6,11).

Gruppiert man die in der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots, p-2, p-1$$

enthaltenen Reste in einzelne Blöcke aufeinander folgender Zahlen (wobei einige Blöcke vielleicht nur aus einer einzigen Zahl bestehen), so ist jede Lücke zwischen zwei benachbarten Blöcken durch einen Block aufeinander folgender Nichtreste ausgefüllt. Wenn man jede Zahl um 1 vermehrt, so wird von jedem Block die letzte Zahl und nur sie ihren Restcharakter ändern. Wie viele Zahlen das tun, wird aber in den Sätzen 1 bis 4 ausgesprochen, wodurch sich ohne weiteres die Zahl der Blöcke ergibt:

Satz 9. Für $p = 4k-1$ bilden die $2k$ Reste (inklusive 0) und ebenso die $2k-1$ Nichtreste je k Blöcke von aufeinander folgenden Zahlen.

Satz 10. Für $p = 4k+1$ bilden die $2k+1$ Reste (inklusive 0) und ebenso die $2k$ Nichtreste je k Blöcke von aufeinander folgenden Zahlen.

Bei Satz 10 ist zu beachten, daß $p-1$ und 0 zwei aufeinander folgende Reste sind, also demselben Block angehören. Für $p = 13$, also $k = 3$, hat man z. B. für die Reste die drei Blöcke

$$0,1), (3,4), (9,10), (12,$$

wobei die Schlußzahl 12 mit den Anfangszahlen 0,1 zusammen nur einen Block bildet. In den Lücken stehen die drei Blöcke aufeinander folgender Nichtreste:

$$(2), (5, 6, 7, 8), (11).$$

§ 5.

Ergänzungen zum Fall $p = 4k-1$.

Schreibt man die $2k$ Reste (inklusive 0) in eine Zeile, in die nächste Zeile darunter die um 1 vermehrten Zahlen, in die folgende Zeile

darunter die abermals um 1 vermehrten Zahlen usw., so erhält man das Schema von $p = 4k - 1$ Zeilen und $2k$ Spalten:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} r_1, & r_2, & \dots, & r_{2k} \\ r_1 + 1, & r_2 + 1, & \dots, & r_{2k} + 1 \\ r_1 + 2, & r_2 + 2, & \dots, & r_{2k} + 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 + p - 1, & r_2 + p - 1, & \dots, & r_{2k} + p - 1. \end{cases}$$

Hier hat nach Satz 1 die erste Zeile mit jeder folgenden genau k Zahlen gemein. Aber auch zwei beliebige Zeilen

$$r_1 + b,\ r_2 + b,\ \dots,\ r_{2k} + b$$
$$r_1 + c,\ r_2 + c,\ \dots,\ r_{2k} + c$$

haben genau k Zahlen miteinander gemein. Denn nach Satz 1 haben ja die beiden Zeilen

$$r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_{2k}$$
$$r_1 + c - b,\ r_2 + c - b,\ \dots,\ r_{2k} + c - b$$

genau k Zahlen gemein, und hieraus entstehen durch Addition von b die obigen zwei Zeilen, für die also dasselbe gilt.

Diese Verhältnisse lassen sich in folgender Weise illustrieren. Man denke sich auf der unendlichen Zahlengeraden die ganzen Zahlen markiert und zwar die quadratischen Reste (inklusive 0, $\pm p$, $\pm 2p$, ...) etwa durch dicke, die Nichtreste durch dünne Marken (Fig. 1 für $p = 7$). Ferner seien auf einem Stab der Länge $L (> p - 1, < p)$ die p Zahlen $0, 1, \dots, p - 1$ in gleicher Weise markiert. Schiebt man nun den Stab an der Linie entlang, so werden in jeder Lage, wo ganze Zahlen auf ganze Zahlen treffen, entweder alle dicken Marken des Stabes oder genau die Hälfte wieder dicken Marken der Linie gegenüberliegen. In Fig 1. ist der Stab in drei verschiedenen Lagen gezeichnet.

Fig. 1.

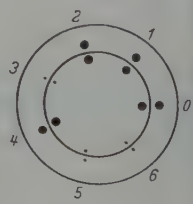

Fig. 2.

Besonders anschaulich ist es auch, wenn man die Zahlenlinie auf der Peripherie einer Kreisscheibe aufwickelt, also die Ecken eines regulären p-Ecks mit den Zahlen $0, 1, \dots, p - 1$ durchnumeriert und die Reste bzw. Nichtreste durch dicke bzw. dünne Marken bezeichnet.

Eine zweite Kreisscheibe mit etwas kleinerem Radius sei konzentrisch und drehbar auf der ersten befestigt und ihr Rand mit der entsprechenden Markierung versehen, wobei zunächst die dicken Marken den dicken gegenüberliegen sollen (Fig. 2 für $p = 7$). Wenn man nun die Drehscheibe um den Winkel φ oder 2φ oder $3\varphi \ldots$ dreht, wo φ den Zentriwinkel des p-Ecks bedeutet, so wird jedesmal (außer bei einer vollen Drehung) genau die Hälfte aller dicken Marken wieder dicken gegenüberliegen [7]).

Das Schema (A) hat die Eigenschaft, daß je zwei Zeilen erstens konstante Differenz haben und zweitens genau k gemeinsame Zahlen aufweisen. Auf die Reihenfolge der Zeilen und Spalten soll es nicht ankommen. Ersetzt man im Schema (A) jede Zahl α durch die entgegengesetzte $-\alpha$, so entsteht ein Schema mit der gleichen Eigenschaft, das wir (B) nennen wollen. Im Fall $p = 3$ sind beide Schemas miteinander identisch; die drei Zeilen sind einfach die drei aus den Zahlen 0, 1, 2 zu bildenden Paare und weitere derartige Schemas gibt es nicht. Für $p > 3$ ist aber (B) mit (A) nicht identisch. Denn das Schema (B) enthält in der ersten Zeile die Zahl 0 und die $2k - 1$ Nichtreste, also keinesfalls k Reste, so daß diese Zeile nicht im Schema (A) auftritt. Bei der geometrischen Deutung auf der Zahlenlinie oder Kreisscheibe gehen beide Schemas durch Spiegelung ineinander über.

Man kann nun fragen, ob es außer den Schemas (A) und (B) noch weitere Schemas der gleichen Art gibt. Für $p = 7$ ist das nicht der Fall. Denn die vier dicken Marken müssen in zwei Blöcke aufeinander folgender Marken zerfallen, was sich aus den geforderten Eigenschaften des Schemas genau so ergibt wie Satz 9 aus Satz 1. Aber zwei Blöcke mit je zwei dicken Marken erweist ein Blick auf die Drehscheibe als unmöglich, weil dann nach einer Drehung um den zweifachen Zentriwinkel immer nur eine dicke Marke einer dicken gegenüberliegt statt zwei, wie verlangt. Es muß also ein Block mit einer und ein Block mit drei dicken Marken sein. Aber da gibt es nur die in Fig. 2 gezeichnete Anordnung und ihr Spiegelbild. Auch für $p = 11$ gibt es kein weiteres Schema, wiewohl die Durchführung aller Versuche auf der Drehscheibe jetzt schon wesentlich mühsamer ist. Für $p = 19$ kann ich ebenfalls kein weiteres Schema angeben. Doch sind die durchzuprüfenden Möglichkeiten jetzt schon so mannigfaltig, daß ich auf eine lückenlose Prüfung verzichtet habe. Und erst recht wird man für $p > 19$ ohne neue Ideen nicht herauskriegen, wieviel verschiedene Schemas es gibt.

Wenn $p = 4k - 1$ keine Primzahl ist, bleibt die Frage, ob es überhaupt ein Schema der verlangten Art gibt, völlig offen. Ich möchte

[7]) Der phantasievolle Leser kann die Drehscheibe auch zu einem Gesellschaftsspiel verarbeiten, indem er die Scheiben mit Personen statt mit Marken besetzt.

wohl annehmen, daß es stets mehrere solche Schemas gibt, doch kann ich kein Rezept angeben, nach dem man sicher eines erhält. Für $p = 15$ fand ich eines, dessen erste Zeile so aussieht:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 11$$

oder auf dem Stab

Daneben gibt es das durch Spiegelung entstehende Schema mit der ersten Zeile 0, 14, 13, 12, 10, 8, 7, 4, oder der Größe nach geordnet:

$$0,\ 4,\ 7,\ 8,\ 10,\ 12,\ 13,\ 14.$$

Die beiden Schemas sind nicht identisch; vielleicht gibt es auch noch andere.

(Eingegangen am 18. März 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 131—133 (1952).

Der Satz vom vollständigen Viereck bei kollinearen Diagonalpunkten.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

Günter Pickert in Tübingen.

R. Moufang hat gezeigt [1], daß in einer projektiven Ebene aus dem Satz vom vollständigen Viereck der Satz von Desargues für den Sonderfall der Inzidenz von Zentrum und Achse folgt. Unter einer *projektiven Ebene* ist dabei zu verstehen eine Menge, deren Elemente als *Punkte* bezeichnet werden, zusammen mit einer Menge von Teilmengen, *Geraden* genannt, welche die Bedingungen erfüllen: Zwei verschiedene Punkte liegen in genau einer Geraden; zwei Geraden haben stets einen Punkt gemeinsam; es gibt vier Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen. Der *Satz vom vollständigen Viereck* (V), der übrigens nicht in jeder projektiven Ebene zu gelten braucht, besagt: Sind A, B, C, D vier Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und setzt man [2] $P = AB \wedge CD$ sowie $Q = AC \wedge BD$ $(\neq P)$, so ist $PQ \wedge AD$ bereits durch P, Q und $PQ \wedge BC$ eindeutig bestimmt. P, Q und $R = AD \wedge BC$ $(\neq P, Q)$ werden als die *Diagonalpunkte* des (vollständigen) Vierecks mit den *Eckpunkten* A, B, C, D bezeichnet. Ihre Kollinearität, also $R \in PQ$, bedeutet dasselbe wie $PQ \wedge AD = PQ \wedge BC$. M. Hall hat nun darauf hingewiesen [3], daß der Moufangsche Beweis die Voraussetzung der Nichtkollinearität der Diagonalpunkte in jedem Viereck benötigt. Ich werde im folgenden zeigen, daß man diese Voraussetzung noch etwas abschwächen kann: Unter der Voraussetzung V folgt nämlich aus der Kollinearität der Diagonalpunkte in *einem* Viereck dasselbe für *jedes* Viereck. Die Voraussetzung V wird in den folgenden Sätzen nicht mehr besonders erwähnt.

Hilfssatz 1. *Sind P, Q, R die Diagonalpunkte eines Vierecks und R' ein Punkt $\neq P, Q$ auf PR, so sind auch P, Q, R' Diagonalpunkte eines Vierecks.*

---

[1] Math. Ann. 106 (1932), 755—795.

[2] AB bedeutet die Gerade, welche die beiden Punkte A, B enthält und $g \wedge h$ den Punkt, welcher in jeder der beiden Geraden g, h liegt.

[3] Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), 229—277, insb. 269, Fußn. 19.

Beweis. Die Bezeichnungen A, B, C, D seien so wie oben verwandt. Wegen $R' \neq Q$ kann R' nicht auf AC und BD zugleich liegen. O.B.d.A. sei daher angenommen, daß R' nicht auf BD liegt. Setzt man nun $DR' \wedge AB = A'$ und $BR' \wedge CD = C'$, so sind A', P, R', C' die Eckpunkte eines Vierecks mit den beiden Diagonalpunkten $B = A'P \wedge R'C'$, $D = A'R' \wedge PC'$. Ferner sind natürlich auch A, P, R, C die Eckpunkte eines Vierecks mit denselben beiden Diagonalpunkten. Wegen $PR' \wedge BD = PR \wedge BD$ folgt daher aus V die Gleichung $A'C' \wedge BD = AC \wedge BD = Q$. Wegen $R' = BC' \wedge DA'$ und $P = A'B \wedge C'D$ sind somit A', B, C', D die Eckpunkte eines Vierecks mit den Diagonalpunkten P, Q, R'.

Hilfssatz 2. *Hat ein Viereck kollineare Diagonalpunkte, so gilt dasselbe für jedes Viereck, welches mit diesem zwei Diagonalpunkte gemeinsam hat.*

Beweis. Die Bezeichnungen A, B, C, D, P, Q, R werden wie oben verwandt, und R liege auf PQ. Will man jetzt die Kollinearität der Diagonalpunkte eines Vierecks beweisen, das ebenfalls P und Q als Diagonalpunkte besitzt, so darf man sich auf den Fall eines Vierecks mit den Eckpunkten A', C', B, D beschränken, wobei A' auf AB, C' auf CD und Q auf $A'C'$ liegt; denn durch höchstens viermaliges Anwenden dieses Sonderfalles gelangt man offenbar zu einem beliebigen Viereck mit Diagonalpunkten P, Q. Man betrachtet nun wie im Beweis von Hilfssatz 1 die Vierecke mit den Eckpunkten A, P, R, C bzw. A', P, R', C', wobei $R' = BC' \wedge DA'$ gesetzt ist, und schließt aus V, daß $PR' \wedge BD = PR \wedge BD$ und somit tatsächlich $R' \in PR$, also $R' \in PQ$ ist.

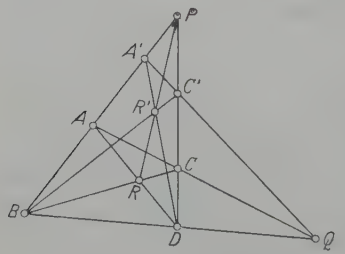

Fig. 1.

Satz. *Hat ein Viereck kollineare Diagonalpunkte, so gilt dasselbe für jedes Viereck.*

Beweis. Im Widerspruch zur Behauptung seien die Diagonalpunkte P', Q', R' eines Vierecks nicht kollinear, während P, Q, R kollineare Diagonalpunkte eines anderen Vierecks sind. Offenbar kann man die Bezeichnungen so wählen, daß R' nicht auf PQ liegt. Dann ist $PQ \neq P'R'$, $PQ \neq Q'R'$ und mit $PQ \wedge P'R' = P''$, $PQ \wedge Q'R' = Q''$ ferner

$$Q' \neq P'' \neq R' \neq Q'' \neq P''.$$

Nach Hilfssatz 1 gibt es daher ein Viereck mit den Diagonalpunkten P'', Q', R' und weiter eins mit den Diagonalpunkten P'', Q'', R'. Werden schließlich die Bezeichnungen P, Q noch so gewählt, daß $P \neq Q''$ ist, so gewinnt man nach Hilfssatz 1 ein Viereck mit den Diagonalpunkten P, Q'', R' und weiter eins mit den Diagonalpunkten P, Q, R'. Da diese nicht kollinear sind, hat sich so ein Widerspruch zu Hilfssatz 2 ergeben.

Daß ohne die Voraussetzung V' der Satz nicht bewiesen werden kann, zeigt das folgende Beispiel. Zu der Teilebene[4]), welche aus acht Punkten A, B, C, D, P, Q, R, D' und den sieben Geraden $\{A, B, P\}$, $\{C, D, P\}$, $\{B, D, Q\}$, $\{A, C, Q\}$ $\{A, D, R\}$ $\{B, C, R\}$, $\{P, Q, R\}$ besteht, wird eine projektive Ebene als freie Erweiterung gebildet. Beim ersten Schritt werden dabei die Verbindungsgeraden AD', BD', ... hinzugefügt und beim zweiten Schritt die Schnittpunkte $P' = AB \wedge CD'$, $Q' = AC \wedge BD'$, $R' = AD' \wedge BC$, ... Da bei keinem der zur freien Erweiterung führenden Konstruktionsschritte Inzidenzen zwischen bereits vorher gebildeten Elementen eingeführt werden, liegen P', Q', R' in der freien Erweiterung nicht auf einer Geraden.

[4]) Zu den Begriffen Teilebene (partial plane) und freie Erweiterung siehe M. Hall a. a. O. [3]), 233—243.

(Eingegangen am 3. April 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 134—151 (1952).

Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

Karl Zeller in Tübingen[1]).

1. Einleitung.

Wir betrachten Folgen komplexer Zahlen x_k $(k = 0, 1, \ldots)$ und Matrizen $A = \{a_{nk}\}$ mit komplexen Elementen a_{nk} $(n, k = 0, 1, \ldots)$. Wir sagen, daß die Matrix A oder das Matrixverfahren A die Folge x_k zum Werte x *limitiert*, wenn alle Summen

$$x_n^A = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

existieren und $\lim_n x_n^A = x$ gilt. Die Menge $\mathfrak{A}$ der A-limitierbaren Folgen heißt das *Wirkfeld* von A.

Wir nennen $\{s_k\}$ eine *Faktorfolge* (zu einer A-limitierbaren Folge x_k), wenn auch $\{x_k s_k\}$ von A limitiert wird. Das erste Ziel der Arbeit ist, unter gewissen Bedingungen Faktorfolgen zu bestimmen. Wir erläutern den von uns eingeschlagenen Weg an einem Beispiel.

Die Matrix A sei permanent (vgl. die Bezeichnungen in § 2) und limitiere die beschränkte Folge x_k zum Werte Null. Dann besitzt die Matrix G mit den Elementen $g_{nk} = a_{nk} x_k$ die Eigenschaften

$$(\mathrm{Zr}) \qquad |\sum_{k=r}^{\infty} g_{nk}| \leqq M \qquad (n, r = 0, 1, \ldots),$$

$$(\mathrm{Zs}_0) \qquad \lim_n \textstyle\sum_k g_{nk} = 0,$$

$$(\mathrm{Sp}_0) \qquad \lim_n g_{nk} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Satz 3.2 besagt, daß wir natürliche Zahlen $q_0 < q_1 < \cdots$ so bestimmen können, daß G alle Folgen s_k limitiert, die der Bedingung

$$|\mathrm{Q}| \qquad \sum_{k=q_i+1}^{q_{i+1}} |s_k - s_{k-1}| = \sigma_i = o(1)$$

genügen. M. a. W.: G limitiert alle „genügend langsam schwankenden" Folgen s_k. Diese $\{s_k\}$ sind nun offenbar Faktorfolgen bezüglich A und $\{x_k\}$. Wir erhalten also in der Form $\{x_k s_k\}$ zahlreiche weitere A-limitierbare Folgen; unter diesen befinden sich unbeschränkte (§ 9).

[1]) Der Inhalt dieser Arbeit bildete den Gegenstand eines Vortrags, den Verf. im September 1951 auf der DMV-Tagung in Berlin hielt.

Wir können das Ergebnis auch in die Form eines Limitierbarkeitskriteriums kleiden: „Eine Folge $\{y_k\}$ ist A-limitierbar, wenn sie in der Form $\{x_k s_k\}$ darstellbar ist, wo ...".

Die damit beschriebene Methode der Faktorfolgen wurde schon von Agnew [1] angewandt (man vgl. die Bemerkung am Ende von 3.4). Verf. verdankt der Agnewschen Arbeit mancherlei Anregungen.

In 3.2 bestimmen wir überdies die Klasse der Matrizen, für die irgendeine Bedingung der Form $|Q|$ ein Limitierbarkeitskriterium ist. Die Sätze 3.1, 3.3, 3.4 und 3.5 sind von derselben Art. In 3.1 tritt dabei die stärkste, in 3.5 die schwächste Schwankungsbedingung auf. 3.6 bringt ein einfaches Limitierbarkeitskriterium anderer Gestalt.

Mit $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ bezeichnen wir — siehe § 4 — die Menge derjenigen $\{x_k\}$ aus einem Wirkfeld $\mathfrak{A}$, die so beschaffen sind, daß die oben definierte Matrix G den Voraussetzungen von 3.i $(i = 1, \ldots, 5)$ genügt. In §§ 5—7 untersuchen wir $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ näher ($\mathfrak{A}_4$ und $\mathfrak{A}_5$ sind weniger interessant), u. a. mit Verwendung von Faktorfolgen, wobei wir für diese Unterräume des Wirkfeldes Vergleichs- und Approximationssätze sowie Größenordnungs- und Umkehrbedingungen aufstellen.

Weiter bedeutet $\mathfrak{A}_0$ eine Untermenge des Wirkfeldes, die bei permanenten Matrizen genau die zu Null limitierten Folgen umfaßt, bei anderen Matrizen in naheliegender Verallgemeinerung definiert ist. Von besonderer Bedeutung sind nun die Matrizen mit $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$. Zu diesen gehört z. B. das C_1-Verfahren. 7.5 liefert damit u. a. eine Variante des Beweises für den $O - C_1$- K-Umkehrsatz. Für den Nachweis der Eigenschaft $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$ ist ein Ergebnis aus § 8 wichtig, das besagt: Gilt für eine Matrix A die — relativ leicht nachzuweisende — Beziehung $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_2$, so ist sogar $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$.

In § 9 beweisen wir: Limitiert eine konvergenztreue Matrix eine beschränkt-divergente Folge, so auch eine unbeschränkte Folge. Dabei können wir über die zugehörigen Reihenglieder — d. h. die ersten Differenzen der Folgen — gewisse zusätzliche Aussagen machen, aus denen sich Beziehungen zwischen Umkehrsätzen ergeben (siehe 9.2).

Mit Hilfe der Ergebnisse des § 3 können wir auch nicht-limitierte Folgen konstruieren und damit weitere Umkehrsätze erhalten (§ 10). § 11 bringt einen Satz über Matrizen, die mit zwei limitierten Folgen x_k und y_k stets auch $\{x_k y_k\}$ limitieren. § 12 weist auf einige Verallgemeinerungen hin, die Integraltransformationen und den Durchschnitt abzählbar vieler Wirkfelder betreffen.

Die Untermengen $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ sind auch leicht vom funktionalanalytischen Standpunkt aus zu charakterisieren. Man vergleiche dazu die Veröffentlichungen des Verfassers [12, 13], in denen einige Ergebnisse der vorliegenden Arbeit auf anderem Wege erhalten wurden.

Unter der verwendeten Literatur sei noch besonders auf die Arbeit von Mazur und Orlicz [8] hingewiesen (siehe auch 9.1, 9.3, 11.1, 12.1).

2. Bezeichnungen.

Zahlenfolgen bezeichnen wir mit $\{x_k\}$ oder x_k. Wir kürzen $\sum_{k=0}^{\infty}$ ab durch $\sum_k$ oder $\sum$. Entsprechendes gilt für fin, lim usw. In Gleichungen $x_k = y_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ wird häufig $(k = 0, 1, \ldots)$ weggelassen. K und M sind Konstante, die von den in der jeweiligen Formel vorkommenden Variabeln unabhängig sind. Wir setzen $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(x_{-1} = 0)$. Mit $\nearrow$ und $\searrow$ bezeichnen wir Monotonie im weiteren Sinn (z. B. $x_k \searrow 0$).

Eine *abbrechende Folge* ist eine Folge mit nur endlich vielen nicht verschwindenden Gliedern. Unter einer *Indexfolge* q_i verstehen wir eine unbeschränkte Folge ganzer Zahlen $-1 \leqq q_0 \leqq q_1 \leqq \cdots$. Der Wert -1 ist zur Erleichterung der Schreibung mancher Formeln zugelassen. Folgenglieder mit Index -1, etwa x_{-1}, sind meistens gleich Null zu setzen. Die *Anzahlfunktion* ω_k der q_i ist die durch „ω_k = Anzahl der $q_i \leqq k$“ definierte Folge.

Gilt $x_k = w_k d_k$ mit $\operatorname{fin}|w_k| < \infty$, so schreiben wir $x_k = O(d_k)$. Wir lassen für die d_k auch den Wert „∞“ zu, wobei jede (endliche) Zahl als in der Form $0 \cdot \infty$ darstellbar gilt. Eine Bedingung $O(d_k)$ heißt schärfer als $O(e_k)$, wenn jede der ersten Bedingung genügende Folge auch die zweite erfüllt, das Umgekehrte aber nicht der Fall ist. Entsprechendes gilt für $x_k = o(d_k)$ mit $\lim w_k = 0$.

Eine Matrix heißt *konvergenztreu (permanent)*, wenn sie jede konvergente Folge (zu ihrem Grenzwert) limitiert. Wir verwenden ferner folgende Eigenschaften bei Matrizen (die Existenz — im eigentlichen Sinn — der jeweils benützten Grenzwerte ist in den Bedingungen eingeschlossen):

(Sp) $\lim_n y_{nk}$ existiert $(k = 0, 1, \ldots)$;

(Sp_0) $\lim_n y_{nk} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$;

(Zs) $\lim_n \sum_k y_{nk}$ existiert;

(Zs_a) $\lim_n \sum_k y_{nk} = a$;

(Zn) $\sum_k |y_{nk}| \leqq M$ $(n = 0, 1, \ldots)$;

(Zn_0) $\lim_r \operatorname{fin}_n \sum_{k=r} |y_{nk}| = 0$;

(Zr) $|\sum_{k=r}^{\infty} y_{nk}| \leqq M$ $(n, r = 0, 1, \ldots)$;

(Zr_0) $\lim_r \operatorname{fin}_n |\sum_{k=r}^{\infty} y_{nk}| = 0$.

Ferner setzen wir

$$\chi = \chi_Y = \lim_n \sum_k y_{nk} - \sum_k \lim_n y_{nk} = \lim_r \lim_n \sum_{k=r}^{\infty} y_{nk}.$$

(Der rechts stehende Ausdruck soll dabei nur dann als erklärt gelten, wenn $\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} y_{nk}$ für $r = 0, 1, \ldots$ existiert.) Beide Ausdrücke für χ sind gleichzeitig erklärt und dann einander gleich. Dies erkennt man nach naheliegenden Umformungen aus den Beziehungen

$$\lim_n \sum_{k=p}^{r} y_{nk} = \sum_{k=p}^{r} \lim_n y_{nk} \qquad (p, r = 0, 1, \ldots),$$

$$\lim_n \sum_k y_{nk} - \sum_k \lim_n y_{nk} = \lim_n \sum_{k=r} y_{nk} - \sum_{k=r} \lim_n y_{nk} \quad (r = 0, 1, \ldots),$$

$$\lim_r \sum_{k=r} \lim_n y_{nk} = 0.$$

Wir geben noch einige Erläuterungen zu den genannten Eigenschaften. Sprechen wir von einer Matrix mit $\chi = a$, $\chi = 0$, $\chi \neq 0$, so ist darin impliziert, daß χ im eigentlichen Sinne existiert (was z. B. bei konvergenztreuen Matrizen der Fall ist). Die Matrizen mit $\chi = 0$ unterscheiden sich wesentlich von denjenigen mit $\chi \neq 0$. Eine Sp_0-Matrix hat genau dann $\chi = 0$, wenn sie Zs_0-Matrix ist. Aus Zr_0 (oder auch Zn_0) und Sp folgt $\chi = 0$ (rechte Seite der Definitionsgleichung für χ verwenden!).

Eine Matrix ist genau dann konvergenztreu (permanent), wenn sie den Bedingungen Zn, Zs, Sp ($\mathrm{Zn}, \mathrm{Zs}_1, \mathrm{Sp}_0$) genügt. Sie ist genau dann konvergenzerzeugend (d. h. limitiert jede beschränkte Folge), wenn sie Sp und Zn_0 erfüllt. Für die Bedeutung von Zr, Zr_0 und χ vergleiche man § 3.

3. Limitierbarkeitskriterien.

Wir setzen in § 3 durchweg $u_k = \Delta s_k$, also $s_k = \sum_{l=0}^{k} u_l$.

3. 1. Von Hahn [5, Satz X b], Lorentz [7] und Winn [11] wurde bewiesen: *Eine Matrix G limitiert genau dann alle absolut konvergenten Folgen (d. h. Folgen s_k mit $\sum |u_k| < \infty$), wenn G den Bedingungen Zr, Zs und Sp genügt.*

Wir bemerken dazu: Genügen G und $\{s_k\}$ den genannten Bedingungen, so hat auch die Matrix $\{g_{nk} s_k\}$ die Eigenschaften Zr, Zs und Sp. Denn sie limitiert alle absolut konvergenten Folgen z_k, weil für solche stets $\{s_k z_k\}$ absolut konvergent ist.

3. 2. Satz. *Zu einer Matrix G mit den Eigenschaften Zr und $\chi = 0$ können wir eine Indexfolge q_i bestimmen, so daß G jede Folge limitiert, die der Bedingung*

$$|Q| \qquad \sum_{l=q_i+1}^{q_{i+1}} |u_l| = \sigma_i = o(1)$$

genügt. Hat G nicht die Eigenschaften Zr und $\chi = 0$, so gibt es für G kein Limitierbarkeitskriterium der Form $|Q|$ (wo $\{q_i\}$ eine Indexfolge ist).

Beweis. Hilfssatz 1. *Genau dann limitiert die Matrix H alle einer bestimmten Bedingung $|Q|$ genügenden Folgen u_l (und zwar zum Werte $\sum_l u_l \lim_n h_{nl}$), wenn H Sp-Matrix ist und die Matrix H' mit den Elementen*

$$h'_{ni} = \max_{q_i < l \leqq q_{i+1}} |h_{nl}|$$

der Bedingung Zn genügt.

Es ist

$$|\sum_{l=q_i+1}^{q_{i+1}} h_{nl} u_l| \leqq h'_{ni} \sigma_i . \tag{1}$$

Man weiß nun (vgl. etwa Schur [9, Satz IV]): Eine Matrix H' limitiert genau dann jede Nullfolge σ_i (und zwar zum Werte $\sum_i \sigma_i \lim_n h'_{ni}$), wenn sie die Eigenschaften Zn und Sp besitzt. Man sieht daraus, daß die Bedingungen hinreichend sind. Ihre Notwendigkeit ergibt sich mit dem Schurschen Beweisverfahren oder einer der bekannten funktionalanalytischen Methoden.

Hilfssatz 2. *Konvergiert $\sum g_k s_k$ für alle $\{s_k\}$, die einer bestimmten Bedingung $|Q|$ genügen, so gilt für diese $\{s_k\}$*

$$\sum g_k s_k = \sum h_l u_l \quad \text{mit} \quad h_l = \sum_{k=l}^{\infty} g_k .$$

Zum Beweis wendet man Hilfssatz 1, insbesondere die eingeklammerte Bemerkung, auf die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} g_0 & & & \\ g_0 + g_1 & g_1 & & \\ g_0 + g_1 + g_2 & g_1 + g_2 & g_2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

an. Es ist nämlich

$$u_n^F = \sum_{k=0}^{n} g_k s_k .$$

Wir kommen zum eigentlichen Beweis des Satzes.

I. G limitiere alle $\{s_k\}$, die eine bestimmte Bedingung $|Q|$ erfüllen. Nach Hilfssatz 2 gilt dann

$$\sum_k g_{nk} s_k = \sum_l h_{nl} u_l \quad \text{mit} \quad h_{nl} = \sum_{k=l}^{\infty} g_{nk}$$

für die betrachteten $\{s_k\}$. Den nach Hilfssatz 1 für H erfüllten Bedingungen entnehmen wir, daß

$$|h_{nl}| \leqq M \ (l, n = 0, 1, \ldots) \quad \text{und} \quad \lim_l \lim_n h_{nl} = 0$$

gilt (letzteres, weil wegen Zn $\sum_l |\lim_n h'_{nl}| < \infty$ ist). Daraus sieht man, daß G die Eigenschaften Zr und $\chi = 0$ besitzt.

II. G genüge den Bedingungen Zr und $\chi = 0$. Wir bestimmen H wie unter I. Die $\alpha_i \geqq 0$ seien irgendwelche Zahlen mit $\sum \alpha_i < \infty$. Wir definieren die Indexfolge q_i und eine Hilfs-Indexfolge n_i induktiv. Die Auswahl gemäß den unten gegebenen Vorschriften ist möglich, weil H den Bedingungen

$$\lim_l h_{nl} = 0 \ (n = 0, 1, \ldots) \quad \text{und} \quad \lim_l \lim_n h_{nl} = 0$$

genügt. Wir bestimmen $q_0 < q_1$ so, daß

$$|\lim_n h_{nl}| < \alpha_i \quad \text{für} \quad q_i < l \qquad (i = 0, 1)$$

gilt und setzen $n_0 = -1$. Nun seien $q_0, \ldots, q_j, n_0, \ldots, n_{j-1}$ bestimmt. Wir wählen $n_j > n_{j-1}$ so, daß

$$|h_{nl}| < \alpha_{j-1} \quad \text{für} \quad q_{j-1} < l \leqq q_j, \ n_j < n$$

gilt (vgl. die Ungleichung für $\lim_n h_{nl}$); sodann $q_{j+1} > q_j$ derart, daß

$$|h_{nl}| < \alpha_{j+1} \text{ für } q_{j+1} < l, \quad n \leqq n_j; \qquad |\lim_n h_{nl}| < \alpha_{j+1} \text{ für } q_{j+1} < l$$

gilt. Die h'_{ni} seien wie im Hilfssatz 1 definiert. Für $n_j < n \leqq n_{j+1}$ ist

$$h'_{ni} \begin{cases} \leqq \alpha_i & (i = j, j+1) \\ \leqq M & (i = j, j+1). \end{cases}$$

H limitiert also nach Hilfssatz 1 alle $\{u_l\}$, die $|Q|$ genügen. Wir müssen noch erreichen, daß $u_n^H = s_n^G$ ist. Dazu bieten sich zwei Wege. Entweder bestimmen wir die q_i so, daß auch die Summen $\sum_k g_{nk} s_k$ für alle $|Q|$ genügenden $\{s_k\}$ konvergieren, — dies erreicht man z. B. durch Auswahl einer geeigneten Teilfolge der oben definierten q_i —, und wenden Hilfssatz 2 an. Oder wir unterwerfen die α_i noch der Bedingung $i \cdot \alpha_i = O(1)$. Dann folgen aus

$$\sum_{k=0}^{r} g_{nk} s_k = \sum_{l=0}^{r} h_{nl} u_l - h_{n,r+1} \cdot s_r$$

und

$$s_k = o(\omega_k) \quad (\omega_k = \text{Anzahlfunktion der } q_i)$$

die Gleichungen $u_n^H = s_n^G$.

Für zeilenfinite Matrizen vereinfacht sich der Beweis. Man vgl. 8. 3. Wir bemerken für später, daß es immer eine $|Q|$ genügende Folge $s_k \nearrow \infty$ gibt.

3. 3. *Für Matrizen mit den Eigenschaften* Zr_0 *und Sp gilt ein entsprechender Satz unter Verwendung der Bedingung*

$$|Q^*| \qquad \sum_{l=q_i+1}^{q_{i+1}} |u_l| = O(1).$$

3. 4. Satz. *Zu einer Matrix G mit den Eigenschaften Zn und $\chi = 0$ können wir eine Indexfolge q_i bestimmen, so daß G jede Folge*

s_k *limitiert, die der Bedingung*

$$(Q) \qquad \operatorname*{Max}_{q_i \leqq k,\, l \leqq q_{i+1}} |s_k - s_l| = o(1)$$

genügt. Hat G *nicht die Eigenschaften* Zn *und* $\chi = 0$, *so gibt es für* G *kein Limitierbarkeitskriterium der Form* (Q).

Beweis. I. G genüge den genannten Bedingungen. Wir definieren zwei Indexfolgen $p_n < r_n$ sowie eine Folge $d_k \nearrow \infty$, so daß die untenstehenden Summen konvergieren und

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{p_n-1} g_{nk} s_k \to \sum_k s_k \lim_p g_{pk}; \quad \sum_{k=r_n+1}^{\infty} g_{nk} s_k \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

für alle $s_k = O(d_k)$ gilt. Dazu bieten sich zwei Möglichkeiten.

1.) Wir wählen die p_n und r_n so, daß

$$\sum_{k=0}^{p_n-1} |g_{nk} - \lim_p g_{pk}| \to 0; \quad \sum_{k=r_n+1}^{\infty} |g_{nk}| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

gilt. Mit einer genügend langsam wachsenden Folge d_k ist dann (2) erfüllt.

2.) Wir wählen eine Folge $d_k \nearrow \infty$, so daß

$$(3) \qquad \sum_k |g_{nk} d_k| < \infty (n = 0, 1 \ldots); \quad \sum_k |d_k \lim_p g_{pk}| < \infty$$

gilt (solche Folgen gibt es wegen Zn) und bestimmen die p_n und r_n so, daß

$$\sum_{k=0}^{p_n-1} |(g_{nk} - \lim_p g_{pk})\, d_k| \to 0; \quad \sum_{k=r_n+1}^{\infty} |g_{nk} d_k| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

gilt. Letztere Forderungen sind wegen (3) erfüllbar.

Setzt man in (2) $s_k = 1$ ein, so liefert $\chi_G = 0$, daß die Zahlen

$$\varepsilon_n = \sum_{k=p_n}^{r_n} g_{nk}$$

eine Nullfolge bilden. Wir wählen nun eine Folge $e_k \nearrow \infty$ mit $e_k \leqq d_k$ und $e_{p_n} \cdot \varepsilon_n = O(1)$. Aus

$$\Big|\sum_{k=p_n}^{r_n} g_{nk} s_k\Big| \leqq |s_{p_n}\ \varepsilon_n| + \operatorname*{Max}_{p_n \leqq k \leqq r_n} |s_k - s_{p_n}| \cdot \sum_{k=p_n}^{r_n} |g_{nk}|$$

und den Formeln (2) erkennen wir, daß G jede Folge limitiert, die den Bedingungen

$$\operatorname*{Max}_{p_n \quad k,\, l \leqq r_n} |s_k - s_l| = o(1), \quad s_k = o(e_k)$$

genügt. Wir wählen die q_i so, daß in jedem Intervall $\langle p_n, r_n \rangle$ höchstens ein q_i liegt und $\omega_k \leqq e_k$ ist (ω_k = Anzahlfunktion der q_i). Jede (Q) genügende Folge s_k erfüllt dann auch die beiden letztgenannten Bedingungen, was die Behauptung ergibt.

II. Wir stellen zunächst fest: Sind (Q^1) und (Q^2) Bedingungen der Form (Q), so gibt es eine dritte Bedingung (Q^3) derselben Form, die nicht schwächer ist als (Q^1) und (Q^2). Wir wählen einfach die Zahlen $q_i^{(3)}$ so, daß in jedem der Intervalle $\langle q_i^{(1)}, q_{i+1}^{(1)}\rangle$ und $\langle q_i^{(2)}, q_{i+1}^{(2)}\rangle$ höchstens ein $q_i^{(3)}$ liegt. Daraus folgt, daß es divergente Folgen gibt, die sowohl (Q^1) als auch (Q^2) genügen.

Nun limitiere G alle einer gewissen Bedingung der Form (Q) genügenden Folgen s_k. Dann ist G konvergenztreu, d. h. genügt den Bedingungen Zn, Zs und Sp. Sei $\chi_G = \alpha$ und I die Einheitsmatrix. Die Matrix $(G - \alpha I)$ hat die Eigenschaften Zn und $\chi = 0$, limitiert also nach I. alle einer zweiten Bedingung (Q) genügenden Folgen s_k. Nach dem voranstehenden Absatz gibt es divergente Folgen s_k, die beiden (Q)-Bedingungen genügen. Diese werden von αI limitiert, woraus $\alpha = 0$ folgt.

Agnew [1] erhielt ein ähnliches Ergebnis, wobei er jedoch nur beschränkte Folgen s_k betrachtet.

3.5. *Ein entsprechender Satz gilt für Matrizen mit den Eigenschaften Sp und Zn_0 unter Verwendung der Bedingung*

$$(Q^*) \qquad \max_{q_i \leqq k,\, l \leqq q_{i+1}} |s_k - s_l| = O(1).$$

3.6. Wir bringen noch ein anders geartetes Limitierbarkeitskriterium: *Eine Sp-Matrix A limitiert alle Folgen t_k, für die*

$$\sum_k |t_k| \cdot \operatorname{fin}_n |a_{nk}| < \infty$$

ist, zum Werte

$$\sum_k t_k \lim_n a_{nk}.$$

Denn die Matrix $\{a_{nk} t_k\}$ genügt den Bedingungen Sp und Zn_0, woraus die Behauptung folgt (vgl. den Schluß von § 2).

Als Anwendung ziehen wir die Folgerung: Bei einer Sp-Matrix A gibt es sicher keine schärfere O- bzw. o-Bedingung als

$$t_k = O \text{ bzw. } o\left(\frac{1}{\operatorname{fin}_n |a_{nk}|}\right),$$

die für alle $\{t_k\} \in \mathfrak{A}$ gilt. —

Agnew [2] zeigte: Genügt eine Matrix A den Bedingungen Zn und $\lim_n \operatorname{fin}_k |a_{nk}| = 0$, so limitiert A eine divergente Folge t_k, die aus Nullen und Einsen besteht. Aus seinen Voraussetzungen folgt Sp und $\lim_k \operatorname{fin}_n |a_{nk}| = 0$. Der Satz am Anfang von 3.6 liefert nun das Agnewsche Ergebnis. Überdies sieht man, daß A dann auch unbeschränkte Folgen limitiert.

4. Ausgezeichnete Teile des Wirkfeldes.

4.1. Wir sagen, daß die Folge x_k aus dem Wirkfeld $\mathfrak{A}$ einer Matrix A der Untermenge $\mathfrak{A}_i (i = 0, 1, 2, 3)$ angehört, wenn die Matrix G mit

den Elementen $g_{nk} = a_{nk} x_k$ die unten bezeichneten Eigenschaften hat:

$\mathfrak{A}_0$: G genügt $\chi = 0$;
$\mathfrak{A}_1$: G genügt Zr und Sp;
$\mathfrak{A}_2$: G genügt Zr und $\chi = 0$;
$\mathfrak{A}_3$: G genügt Zr_0 und Sp.

Da $\{x_k\} \in \mathfrak{A}$ ist, besitzt G überdies in jedem Falle die Eigenschaft Zs, erfüllt also für $i = 1, 2, 3$ die in 3. i für G genannten Bedingungen. Es ist

$$\mathfrak{A}_3 \leqq \mathfrak{A}_2 \begin{matrix} \leqq \mathfrak{A}_0 \\ \leqq \mathfrak{A}_1 \end{matrix} \text{ und } \mathfrak{A}_0 \wedge \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$$

(man vgl. den Schluß von § 2). Bei einer Sp-Matrix A (nur für solche sind die Definitionen von Bedeutung) gehört eine abbrechende Folge jedem $\mathfrak{A}_i (i = 0, 1, 2, 3)$ an. Bei einer Sp_0-Matrix wird $\mathfrak{A}_0$ gebildet von den zu Null limitierten Folgen.

4. 2. Die Bedeutung dieser Untermengen liegt zum Teil darin, daß wir mit Hilfe von 3. i zu einem $\{x_k\}$ aus $\mathfrak{A}_i (i = 1, 2, 3)$ weitere limitierte Folgen in der Form $\{x_k s_k\}$ erhalten.

4. 3. Verfasser hat in früheren Arbeiten [12, 13] die Wirkfelder von Matrizen (und allgemeiner die „FK-Räume") mit funktionalanalytischen Methoden untersucht. Dabei führte er die Eigenschaften SAK und AK ein [13, § 2]. Es gilt nun: Eine Folge x_k gehört genau dann zu $\mathfrak{A}_2 (\mathfrak{A}_3)$, wenn sie SAK (AK) im Wirkfeld $\mathfrak{A}$ besitzt.

5. Der Unterraum $\mathfrak{A}_1$.

5. 1. *Ist* $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_1$, *so gehört auch jede Folge der Form* $\{x_k s_k\}$ mit $\sum |\Delta s_k| < \infty$ *zu* $\mathfrak{A}_1$.

Nach 3. 1, erster Absatz, wird die Folge $x_k s_k$ von A limitiert, nach 3. 1, zweiter Absatz, gehört sie zu $\mathfrak{A}_1$.

5. 2. Für 5. 3 benötigen wir einen Hilfssatz:

Zu jeder unbeschränkten Folge x_k *gibt es eine Folge* $s_k \searrow 0$, so daß die Folge $w_k = x_k s_k$ beschränkt divergent ist und

$$\Delta w_k = o(\Delta x_k) \tag{1}$$

gilt.

Für zwei komplexe Zahlen mit $|y| < |z|$ gilt nämlich die Ungleichung

$$|\Theta z - y| \leqq |z - y| \text{ für } \left|\frac{y}{z}\right|^2 \leqq \Theta \leqq 1. \tag{2}$$

Sei $\xi_{l-1} = \max\limits_{-1 \leq k \leq l-1} |x_k|$ (mit $x_{-1} = 1$). Wir setzen

$$s_k = \prod_{l=0}^{k} \left(\frac{\xi_{l-1}}{\xi_l}\right)^{\alpha(l)} = \prod_{l=0}^{k} \Theta_l,$$

wobei wir $\alpha(l)$ in den Grenzen $0 \leqq \alpha(l) \leqq 2$ noch näher bestimmen.

Es gilt

$$|s_k x_k - s_{k-1} x_{k-1}| = s_{k-1} \cdot |\Theta_k x_k - x_{k-1}| \leqq s_{k-1} \cdot |\Delta x_k|.$$

Denn es ist $\Theta_k \neq 1$ nur, wenn $\xi_k = |x_k| > \xi_{k-1} \geqq |x_{k-1}|$ gilt. Dann ist

$$\left|\frac{x_{k-1}}{x_k}\right|^2 \leqq \left(\frac{\xi_{k-1}}{\xi_k}\right)^2 \leqq \Theta_k \leqq 1.$$

Somit ergibt (2) die gewünschte Abschätzung. Setzen wir $\alpha(l) = 1$, so gilt $s_k \neq 0$ und wir erhalten eine beschränkte Folge w_k, die aber möglicherweise konvergent ist gegen einen Grenzwert w mit $|w| = 1$ (z. B. im Falle $x_k \to \infty$). Lassen wir jedoch $\alpha(l)$ in geeigneter Weise um den Wert 1 pendeln, so können wir die Forderungen des Satzes erfüllen. Der Leser möge dies selber durchführen.

5. 3. Die Ergebnisse von 5. 1 und 5. 2 liefern unmittelbar: *Gibt es in $\mathfrak{A}_1$ eine unbeschränkte Folge x_k, so auch eine beschränkt-divergente Folge w_k, die* (1) *genügt.*

5. 4. *Die natürliche Zahl n_0 und die Folge φ_k mit $\sum |\Delta \varphi_k| = ||\varphi|| < \infty$ seien gegeben. Für jedes $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_1$ ist dann das Funktional*

$$\varphi(x_k) = \sum_k \varphi_k a_{n_0 k} x_k$$

erklärt und es gilt

$$|\varphi(x_k)| \leqq ||\varphi|| \cdot \operatorname{fin}_r \Big|\sum_{k=r} a_{n_0 k} x_k\Big| \leqq ||\varphi|| \cdot \operatorname{fin}_{n,r} \Big|\sum_{k=r} a_{nk} x_k\Big|.$$

Der Beweis erfolgt einfach durch partielle Summation. Man vgl. auch 5. 1.

5. 5. *Für jedes einzelne $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_1$ ist*

$$\Big|\sum_{k=p}^{r} a_{nk} x_k\Big| \leqq M \quad (n, p, r = 0, 1, \ldots;\ p \leqq r).$$

Daraus erhält man mit $p = r$

$$x_k = O\left(\frac{1}{\operatorname{fin}_n |a_{nk}|}\right).$$

Ist A Sp-Matrix, so kann diese O-Bedingung durch keine schärfere ersetzt werden, wie sich aus 3. 6 ergibt (man vgl. dabei 7. 6).

5. 6. *Ist A eine Zn-Sp-Matrix und x_k eine beschränkte Folge aus $\mathfrak{A}$, so gehört $\{x_k\}$ zu $\mathfrak{A}_1$.*

6. Der Unterraum $\mathfrak{A}_2$.

6. 1. *Ist $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_2$, so gehören alle Folgen $\{x_k s_k\}$, wo $\{s_k\}$ einer gewissen (von A und $\{x_k\}$ abhängigen) Bedingung $|Q|$ genügt, zu $\mathfrak{A}$ aber nicht notwendig zu $\mathfrak{A}_2$).*

Dies folgt aus 3. 2.

6. 2. *Gibt es in* $\mathfrak{A}_2$ *eine beschränkt-divergente Folge* x_k, *so enthält* $\mathfrak{A}$ *eine unbeschränkte Folge* y_k. *Bei vorgegebener Folge* $\delta_k \nearrow \infty$ *kann man dabei noch*

$$\Delta y_k = O(\delta_k \Delta x_k) \tag{1}$$

verlangen.

Beweis. Es ist

$$|x_k s_k - x_{k-1} s_{k-1}| \leqq |\Delta x_k| |s_k| + |\Delta s_k| |x_{k-1}|. \tag{2}$$

Wegen $\sum |\Delta x_k| = \infty$ gibt es eine Folge s_k mit den Eigenschaften

$$0 \leqq \Delta s_k \leqq |\Delta x_k|, \quad \sum \Delta s_k = \infty,$$

die überdies der in 6. 1 genannten Bedingung $|Q|$ genügt. Wir können die s_k dabei so langsam wachsen lassen, daß auch $s_k = O(\delta_k)$ gilt. In der Form $y_k = x_k s_k$ erhalten wir die gewünschte Folge (vgl. 6. 1).

Übrigens können wir im allgemeinen nicht (1) durch die schärfere Bedingung $\Delta y_k = O(\Delta x_k)$ ersetzen.

6. 3. *Ist* x_k *eine Folge aus* $\mathfrak{A}_2$, *so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine abbrechende Folge* y_k, *so daß*

$$|x_k^A - y_k^A| < \varepsilon \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

gilt.

Beweis. Sei $g_{nk} = a_{nk} x_k$. Wir bestimmen nach 3. 2. II zu G eine Schwankungsbedingung $|Q|$ und definieren H wie dort. Für die $|Q|$ genügenden $\{s_k\}$ ist $u_n^H = s_n^G$ (mit $u_n = \Delta s_n$). H erfüllt die Bedingungen von Hilfssatz 1 aus 3. 2. Aus der dortigen Abschätzung (1) sehen wir, daß es eine $|Q|$ genügende Folge s_k mit den folgenden Eigenschaften gibt:

$$0 \leqq s_k \nearrow 1, \quad s_k = 1 \text{ für fast alle } k;$$

$$|s_k^G| < \varepsilon.$$

(Wir wählen die s_k so, daß alle σ_i genügend klein sind.) Nun setzen wir einfach $y_k = x_k(1 - s_k)$.

Diese „Approximation durch abbrechende Folgen" hat Bedeutung für Aussagen, die die Verträglichkeit von Matrixverfahren betreffen. Man vgl. dazu Darevsky [3] und Zeller [12, § 6; 13, § 2].

6. 4. Wir definieren G wieder durch $g_{nk} = a_{nk} x_k$. Sei $\{x_k\} \subset \mathfrak{A}_1$. Dann ist möglicherweise $\sum_k \lim_n g_{nk}$ eine beschränkt-divergente Reihe. Konvergiert aber die Reihe (was z. B. unter den Voraussetzungen von 5. 6 eintritt), so existiert χ_G.

Ist überdies $\chi_A \neq 0$, *so erhalten wir in der Form* $\{x_k - a\}$ *eine Folge aus* $\mathfrak{A}_2$, *wenn wir* $a = \dfrac{\chi_G}{\chi_A}$ *setzen.*

7. Der Unterraum $\mathfrak{A}_3$.

7.1. *Ähnlich wie in* 6.1 *erhalten wir Faktorfolgen unter Verwendung der Bedingung* $|Q^*|$.

7.2. *Ist* x_k *eine Folge aus* $\mathfrak{A}_3$, *so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine abbrechende Folge* y_k, *so daß*

$$\operatorname{fin}_{n,\,r} \Big| \sum_{k=r}^{\infty} a_{nk}(x_k - y_k) \Big| < \varepsilon$$

ist.

Dies ist eine Verschärfung des Approximationssatzes in 6.3. Wir setzen einfach bei genügend großem R

$$y_k = \begin{cases} x_k & k \leqq R \\ 0 & k > R. \end{cases}$$

7.3. *Die Sp-Matrix* B *sei von der Form* $b_{mk} = \varphi_k^{(m)} a_{n_m k}$ *mit*

$$\sum_k |\varphi_k^{(m)} - \varphi_{k-1}^{(m)}| = \|\varphi^{(m)}\| \leqq M \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Dann limitiert B *jede Folge aus* $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_3$, *wobei sogar* $\{x_k\} \in \mathfrak{B}_3$ *gilt.*

Wir entnehmen aus 5.4, daß

$$\Big| \sum_k b_{mk} x_k \Big| \leqq M \operatorname{fin}_{n,\,r} \Big| \sum_{k=r}^{\infty} a_{nk} x_k \Big| \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

gilt. Mit 7.2 erhält man nun leicht die Behauptung. Die hier verwendete — oftmals nützliche — Methode, aus $x_m^B = O(1)$ auf $x_m^B = o(1)$ zu schließen, ist z. B. aus den Banachschen Sätzen über Operationenfolgen bekannt.

7.4. *Für jedes* $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_3$ *gilt nach Definition*

$$\overline{\operatorname{fin}}_n \Big| \sum_{k=p}^{r} a_{nk} x_k \Big| \to 0 \qquad (p, r \to \infty). \tag{1}$$

Daraus erhält man mit $p = r$

$$x_k = o\left(\frac{1}{\operatorname{fin}_n |a_{nk}|}\right).$$

Für Sp-Matrizen A kann diese o-Bedingung durch keine schärfere ersetzt werden, wie sich aus 3.6 ergibt (man verwende dabei 7.6).

7.5. Formel (1) ist auch wichtig für Umkehrsätze. Für jedes λ aus einem Intervall $0 < \lambda < \varrho$ sei eine Indexfolge $q_i^{(\lambda)}$ bestimmt, so daß für die betrachtete Matrix A

$$\overline{\operatorname{fin}}_n \sum_i^{\lambda} a_{nk} \geqq \varepsilon(\lambda) > 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

gilt. Dabei bedeutet $\sum_i^{\lambda}$ die Summe über k von $q_i^{(\lambda)} + 1$ bis $q_{i+1}^{(\lambda)}$, und — weiter unten — $\operatorname{Max}_i^{\lambda}$ das Maximum über $q_i^{(\lambda)} < k, l \leqq q_{i+1}^{(\lambda)}$. Eine geeignete Bestimmung der $q_i^{(\lambda)}$ ist jedenfalls möglich, wenn A permanent ist. Wir erhalten einen *Umkehrsatz*:

Es sei $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_s$, $a_{nk} \geqq 0$ *und* (2) *erfüllt. Aus*

$$\lim_{\lambda \to 0} \overline{\lim_i} \operatorname{Max}_i^\lambda |x_k - x_l| = 0 \tag{3}$$

folgt dann $\lim x_p = 0$.

Beweis. Sei (bei festem λ) $q_i^{(\lambda)} < p \leqq q_{i+1}^{(\lambda)}$. Dann ist

$$-x_p \sum_i^\lambda a_{nk} = \sum_i^\lambda a_{nk}(x_k - x_p) - \sum_i^\lambda a_{nk} x_k,$$

also

$$|x_p| \sum_i^\lambda a_{nk} \leqq \operatorname{Max}_i^\lambda |x_k - x_l| \sum_i^\lambda a_{nk} + \left|\sum_i^\lambda a_{nk} x_k\right|.$$

Wir wählen $n = n(\lambda, i)$, so daß $\sum_i^\lambda a_{nk} \geqq \frac{\varepsilon(\lambda)}{2}$ ist. Dann gilt

$$|x_p| \leqq \operatorname{Max}_i^\lambda |x_k - x_l| + \frac{2}{\varepsilon(\lambda)} \left|\sum_i^\lambda a_{nk} x_k\right| = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Wir halten λ fest und lassen p und damit i gegen ∞ gehen. Dann verschwindet II wegen (1) und es ist

$$\overline{\lim_p} |x_p| \leqq \lim_i \operatorname{Max}_i^\lambda |x_k - x_l| \qquad (\lambda > 0).$$

Aus (3) liest man die Behauptung ab.

Wir verwendeten die Landausche Methode für den $O - C_1$-Umkehrsatz. (Diesen erhält man mit $q_i^{(\lambda)} = [(\lambda + 1)^i]$, s. a. § 8.) Ähnlich kann man weitere Umkehrsätze, z. B. mit einseitigen Umkehrbedingungen oder unter Verwendung von Bedingungen der Form $x_k^A = o(\varepsilon_k)$ aufstellen. In letzterem Fall ist 8.3 von Bedeutung. Manchmal ist es günstig, für die $q_i^{(\lambda)}$ auch nichtganzzahlige Werte zuzulassen. Wir schreiben dann die Matrixtransformation in der Form

$$\int_0^\infty a_n(t)\, x(t)\, dt$$

mit $x(t) = x_k$, $a_n(t) = a_{nk}$ $(k \leqq t < k + 1)$ und gehen analog wie oben vor.

7.6. *Jede nach* 3.6 *erhaltene A-limitierbare Folge* t_k *gehört zu* $\mathfrak{A}_s$ (weil die Matrix $\{a_{nk} t_k\}$ den Bedingungen Sp und Zn_0 genügt).

8. Verfahren mit ausgezeichnetem Wirkfeld.

8.1. Es ist nun von Bedeutung, daß es geläufige permanente Matrizen A mit $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_s$ gibt (ein Verfahren mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_s$ ist sicher nicht permanent). Bei diesen Matrizen gelten die in §§ 5—7 aufgestellten Sätze für alle zu Null limitierten Folgen. Z. B. ist $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_s$ für $A = C_1$ (arithmetische Mittel), wie man aus

$$\left|\frac{s_{r+1} + \cdots + s_n}{n+1}\right| = \left|-\frac{s_0 + \cdots + s_r}{n+1} + \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1}\right|$$

$$\leqq \left|\frac{s_0 + \cdots + s_r}{r+1}\right| + \left|\frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1}\right| \qquad (r \leqq n)$$

erkennt. 7.5 gestattet nun u. a. den Beweis des $O - (C_1)$-Umkehrsatzes, während 7.3 Vergleichssätze bezüglich des (C_1)-Verfahrens liefert. Bei anderen Matrizen A findet man relativ leicht die Beziehung $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_2$. Hieraus folgt aber auch schon $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$ (s. Zeller [13], §§ 3 und 4). Dies beweisen wir nun auf neuem Wege.

8.2. *Die Matrix A sei so beschaffen, daß $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_2$ gilt. Dann ist sogar $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$.*

Wir führen die gegenteilige Annahme zum Widerspruch. Sei x_k eine Folge, die zu $\mathfrak{A}_2$, aber nicht zu $\mathfrak{A}_3$ gehört. Dann gibt es natürliche Zahlen $p_0 < r_0 < p_1 < r_1 < \cdots$, so daß

$$\operatorname{fin}_n \Big| \sum_{k=p_i}^{r_i} a_{nk} x_k \Big| \geqq \varepsilon > 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

ist. Mit Hilfe von 6.1 erhalten wir eine Faktorfolge $s_k \nearrow \infty$, die in unendlich vielen der Intervalle p_i, r_i konstant ist. Für die A-limitierbare Folge $y_k = x_k s_k$ ist dann

$$\lim_i \operatorname{fin}_n \Big| \sum_{k=p_i}^{r_i} a_{nk} y_k \Big| = \infty,$$

d. h. $\{y_k\} \notin \mathfrak{A}_2$, womit der gewünschte Widerspruch erzielt ist.

8.3. In einem Spezialfall erhalten wir ein weitergehendes Ergebnis: *A sei eine zeilenfinite Sp_0-Matrix, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$, $\operatorname{fin}_n |a_{nk}| \neq 0$. Dann gibt es zu jeder Folge $\varepsilon_k \to 0$ eine Folge $\delta_k \to 0$, so daß aus $x_k^A = o(\varepsilon_k)$ folgt*

$$\operatorname*{fin}_{n \geqq 0,\ r \geqq p} \Big| \sum_{k=p}^{r} a_{nk} x_k \Big| = o(\delta_p).$$

Beweis. Wir betrachten eine feste Folge $\varepsilon_k \to 0$, wobei wir $\varepsilon_k \neq 0$ annehmen dürfen, und bestimmen irgendwie eine Folge $\eta_k \nearrow \infty$. Wegen Sp_0 können wir nun eine Indexfolge p_n so wählen, daß

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{p_n - 1} (|a_{nk}\, \eta_k| / \overline{\operatorname{fin}}_m |a_{mk}|) = o(\varepsilon_n)$$

ist. Für die Indexfolge $r_n \geqq p_n$ gelte $a_{nk} = 0$ $(k > r_n)$. Nun sei $x_k^A = o(\varepsilon_k)$. Dann gilt — man beachte 7.4 und (1) —

$$\sum_{k=p_n}^{r_n} a_{nk} x_k = o(\varepsilon_n).$$

Wir setzen $a_{nk} x_k = g_{nk}$. G ist wegen $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$ eine Zr_0-Matrix. Aus

$$\sum_{k=p_n}^{r_n} g_{nk} s_k = s_{p_n} \sum_{k=p_n}^{r_n} g_{nk} + u_{p_n+1} \cdot \sum_{k=p_n+1}^{r_n} g_{nk} + \cdots + u_{r_n} g_{nr_n}$$

und (1) sehen wir, daß G alle Folgen s_k limitiert, die die Eigenschaften

$$s_k = O(\eta_k), \quad s_{p_n} = O(1/\varepsilon_n), \quad \sum_{l=p_n+1}^{r_n} |u_l| = O(1)$$

besitzen (vgl. 3.3). Wie in 3.4 erkennen wir, daß G alle Folgen s_k limitiert, die einer gewissen Bedingung Q^* (siehe 3.3) genügen. Und zwar erhalten wir für jede Folge mit $x_k^A = o(\varepsilon_k)$ dieselbe Bedingung Q^*. ω_k sei die Anzahlfunktion der q_i aus Q^*. Dann ist die Behauptung richtig mit $\delta_k = \frac{1}{\omega_k}$.

Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Folge x_k mit $x_k^A = o(\varepsilon_k)$ und zwei Indexfolgen $p(j) \leqq r(j)$, so daß

$$\operatorname{fin}_n \left| \sum_{k=p(j)}^{r(j)} a_{nk} x_k \right| \geqq \delta_{p(j)}$$

ist.

Durch Auswahl einer Teilfolge der $p(k)$ können wir erreichen, daß jeweils mindestens $\frac{1}{2}\omega_{p(k)}$ der links von $p(k)$ gelegenen Intervalle $\langle q_i, q_{i+1}\rangle$ keinen Punkt mit $\bigcup \langle p(j), r(j)\rangle$ gemeinsam haben. Wir konstruieren eine Folge s_k, indem wir in jedem der letztgenannten q-Intervalle ein $u_l = 1$, sonst $u_l = 0$ setzen. Diese Folge s_k ist konstant in den Intervallen $\langle p(j), r(j)\rangle$, genügt Q^* und der Ungleichung $s_{p(j)} \geqq \frac{1}{2}\omega_{p(j)}$. A limitiert die Folge $x_k s_k$ zum Wert Null (vgl. 3.3).

Es gilt

$$\overline{\operatorname{fin}}_n \left| \sum_{k=p(j)}^{r(j)} a_{nk} x_k s_k \right| \geqq \delta_{p(j)} \tfrac{1}{2} \omega_{p(j)} \geqq \tfrac{1}{2}$$

im Widerspruch zu $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_3$. —

Mit einer ähnlichen Methode kann man 8.2 für zeilenfinite Matrizen beweisen.

9. Beschränkte Folgen im Wirkfeld.

9.1. Als leichte Folgerung aus §§ 5—7 erhalten wir:

Limitiert eine konvergenztreue Matrix A eine beschränkt-divergente Folge x_k, so auch eine unbeschränkte Folge y_k. Ist $\delta_k \nearrow \infty$ vorgegeben, so kann man dabei sogar

$$\Delta y_k = o(\delta_k \Delta x_k) \tag{1}$$

verlangen.

Beim Beweis unterscheiden wir zwei Fälle. 1. $\chi_A = 0$. Wir erhalten mittels 3.2 oder 3.4 die gewünschte Folge y_k. 2. $\chi_A \neq 0$. Wir erhalten das Ergebnis aus 6.4 und 6.2.

Der Satz wurde — ohne den Zusatz (1) — ohne Beweis veröffentlicht von Mazur und Orlicz [8, Th. III] und in Spezialfällen bewiesen von Hill [6], Darevskij [14] und Wilansky [10]. Mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln bewies Verfasser diesen und den folgenden Satz in [12, § 7].

9.2. Eine Bedingung $\mathfrak{B}$ nennen wir eine Beschränktheitsbedingung (Konvergenzbedingung) — abgekürzt BB bzw. KB — für eine

Matrix A, wenn jede $\mathcal{B}$ genügende Folge $\{x_k\} \subset \mathfrak{A}$ beschränkt (konvergent) ist. Mit diesen Bezeichnungen erhält man unmittelbar aus 9. 1:

Ist für eine konvergenztreue Matrix A die Bedingung $\Delta x_k = o(c_k)$ eine BB, so sogar eine KB.

9. 3. *Limitiert die konvergenztreue Matrix A eine beschränkt-divergente Folge x_k, so gibt es überabzählbar viele beschränkte Folgen $y_k^{(\xi)}$, die von A limitiert werden und*

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{fin}_k |y_k^{(\xi)} - y_k^{(\eta)}| \geqq 1 \quad (\xi \neq \eta),$$

$$\text{(3)} \qquad \Delta y_k^{(\xi)} = O(\Delta x_k)$$

genügen.

Man beweist dies ganz ähnlich wie 9. 1. Die Durchführung überlassen wir dem Leser. Man vgl. dazu Agnew [1], der diesen Satz ohne den Zusatz (3) mit fast denselben Mitteln bewies. Ferner findet man den ersten Teil des Satzes ohne Beweis bei Mazur und Orlicz [8, Th. V].

10. Umkehrsätze.

10. 1. Mittels der Faktorfolgen — insbesondere aus 5. 2 und 6. 2 — erhält man Beziehungen zwischen gewissen Umkehrbedingungen, wie dies an einem Beispiel in 9. 2 gezeigt wurde. Ferner haben wir in 7. 5 Umkehrsätze hergeleitet.

10. 2. Mit den Ergebnissen aus § 3 können wir auch Kriterien für Nichtlimitierbarkeit und damit Konvergenzbedingungen erhalten. A und B seien konvergenztreue Matrizen, B limitiere keine divergente Folge (woraus wegen 3. 4 $\chi_B \neq 0$ folgt), es sei $\chi_A \neq 0$. (Für B können wir z. B. die Einheitsmatrix I nehmen.) Wir setzen

$$G = A - \frac{\chi_A}{\chi_B} B.$$

Dann ist $\chi_G = 0$ und G genügt den in 3. 2 und 3. 4 gemachten Voraussetzungen. Wir ermitteln mit 3. 2 bzw. 3. 4 für G Limitierbarkeitskriterien der Form Q bzw. (Q). A limitiert keine divergente Folge s_k, die G-limitierbar ist. *Wir haben damit Umkehrbedingungen der Form $|Q|$ bzw. (Q) für A erhalten.*

Ist hingegen A eine konvergenztreue Matrix mit $\chi_A = 0$, so existiert für A ein Limitierbarkeitskriterium der Form Q. Zu jeder weiteren $|Q|$-Bedingung gibt es — man vgl. den Beweis zu 3. 4, Teil II — divergente Folgen, die beiden Q-Bedingungen genügen. Somit ist in diesem Falle keine Umkehrbedingung der Form $|Q|$ und erst recht keine der Form (Q) vorhanden.

10. 3. Der folgende Satz wurde von Erdös und Piranian [4] für permanente Matrizen A bewiesen:

A sei eine permanente Matrix oder genüge allgemeiner den Bedingungen Zr und $\chi_A \neq 0$. Dann gibt es eine Folge s_k, für die alle Summen s_k^A existieren und $\lim_k |s_k^A| = \infty$ ist.

Zum Beweise betrachten wir die Matrix $G = A - \chi_A I$ (I = Einheitsmatrix). Diese limitiert nach 3.2 eine Folge $s_k \nearrow \infty$. Aus

$$s_k^A = s_k^G + \chi_A \cdot s_k$$

liest man die Behauptung ab.

11. Ein Satz über Faktorfolgen.

11.1. Der folgende Satz wurde in einer etwas schwächeren Form von Mazur und Orlicz [8, Th. 4] veröffentlicht.

A sei eine konvergenztreue Matrix mit $\text{fin}_n\, a_{nk} = \alpha_k \neq 0$. Genau dann limitiert A mit zwei A-limitierbaren Folgen x_k und y_k stets auch die Folge $x_k y_k$, wenn A keine divergenten Folgen limitiert.

Beweis. I. Limitiert A keine divergenten Folgen, so besteht das Wirkfeld $\mathfrak{A}$ aus allen konvergenten Folgen. Daraus ergibt sich die Behauptung bezüglich $x_k y_k$.

II. Aus $\{x_k\} \subset \mathfrak{A}$, $\{y_k\} \in \mathfrak{A}$ folge $\{x_k y_k\} \in \mathfrak{A}$. Nun gehört jede konvergente Folge y_k zu $\mathfrak{A}$. Für $\{x_k\} \subset \mathfrak{A}$ muß daher die Matrix $\{a_{nk} x_k\}$ der Bedingung Zn (vgl. die Bemerkung über konvergenztreue Matrizen in § 2), also erst recht der Bedingung $\text{fin}_k \text{fin}_n\, a_{nk} x_k < \infty$ genügen. Wir führen nun zwei Annahmen zum Widerspruch, indem wir eine A-limitierbare Folge w_k mit $\lim w_k \alpha_k = \infty$ konstruieren.

1. Es sei $\lim \alpha_k > 0$, A limitiere eine divergente Folge. Dann limitiert A nach 9.1 auch eine unbeschränkte Folge w_k. Offenbar ist $\lim |w_k| \alpha_k = \infty$.

2. Es sei $\lim \alpha_k = 0$. Aus 3.6 entnehmen wir unter Verwendung bekannter Sätze über absolut konvergente Reihen, daß A eine Folge t_k limitiert, für die $\lim t_k^2 \alpha_k = \infty$ ist. A limitiert dann auch die Folge $w_k = t_k t_k$, die somit die gewünschte Eigenschaft hat.

Es bleibt also nur die Annahme, daß $\underline{\lim}\, \alpha_k > 0$ ist und A keine divergenten Folgen limitiert.

12. Ausblick.

12.1. Die Matrizen $G^{(p)}$ ($p = 0, 1, \ldots$) mögen den Bedingungen Zr und $\chi = 0$ genügen. Nach 3.2 bestimmen wir zu jedem $G^{(p)}$ eine Limitierbarkeitsbedingung $Q^{(p)}$. Wir können nun leicht eine Bedingung $|Q|$ angeben, die nicht schwächer als jede Bedingung $|Q^{(p)}|$ ist — wir wählen die q_j etwa so, daß in jedem Intervall $\langle q_i^{(p)}, q_{i+1}^{(p)} \rangle$ höchstens p der q_j liegen — und erhalten ein allen $G^{(p)}$ gemeinsames Limitierbarkeitskriterium Q, das somit Folgen aus dem Durchschnitt der Wirkfelder der $G^{(p)}$ liefert. Damit lassen sich auch die auf 3.2

aufbauenden Folgerungen, etwa 9. 1. erweitern (man vgl. Mazur und Orlicz [8, Th. 3]).

Entsprechendes gilt für die Bedingungen (Q) usw.

12. 2. Die Ergebnisse der Arbeit lassen sich mit geringen Änderungen auf Integraltransformationen übertragen.

Literaturverzeichnis.

Agnew, R. P.

[1] Convergence fields of methods of summability. Annals of Math. **46**, 93—101 (1945).

[2] A simple sufficient condition that a method of summability be stronger than convergence. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 128—132 (1946).

Darevskij, V.

[3] On Toeplitz's methods. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Sér. math. **11**, 3—32 (1947). (Russisch. Englische Zusammenfassung.)

Erdös, P. und Piranian, G.

[4] A note on transforms of unbounded sequences. Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 787—790 (1947).

Hahn, H.

[5] Über Folgen linearer Operationen. Monatsh. f. Math. **32**, 3—88 (1922).

Hill, J. D.

[6] Some properties of summability. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 227 bis 230 (1944).

Lorentz, G.

[7] Über lineare Summierungsverfahren. Recueil math. Moscou **39**, III, 44—51 (1932).

Mazur, S. und Orlicz, W.

[8] Sur les méthodes linéaires de sommation. C. R. **196**, 32—34 (1933).

Schur, I.

[9] Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. für Math. **151**, 79—111 (1920).

Wilansky, A.

[10] A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 914—916 (1949).

Winn, C. E.

[11] Sur la convergence d'une suite dérivée d'une autre suite à variation bornée. C. R. **194**, 1425—1427 (1932).

Zeller, K.

[12] Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487 (1951).

[13] Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1951).

Darevskij, V.

[14] On intrinsically perfect methods of summation. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Sér. math. **10**, 97—104 (1946). (Russisch. Englische Zusammenfassung.)

(Eingegangen am 7. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 152—178 (1952).

Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

W. Jurkat (Tübingen) **und A. Peyerimhoff** (Gießen).

In einer kürzlich erschienenen Arbeit untersuchten wir Matrixtransformationen, für die ein gewisser Mittelwertsatz gilt [1]). Dort wurden Fragen über die Größenordnung limitierbarer Folgen und über Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren behandelt. In der vorliegenden Arbeit wollen wir verschiedene Anwendungen auf Vergleichssätze besprechen. Wir verwenden dabei eine Fortbildung gewisser funktionalanalytischer Überlegungen, welche Herr Mazur und einige andere Autoren beim Beweis von Verträglichkeitssätzen anwandten [2]). Diese Überlegungen erlauben es uns, unter gewissen Voraussetzungen Schlüsse von O auf o durchzuführen, und diese Voraussetzungen sind erfüllt, wenn der Mittelwertsatz gilt. Der Beweis eines Vergleichssatzes verläuft dann in zwei Schritten: zunächst ergibt sich durch unmittelbare Anwendung des Mittelwertsatzes ein etwas schwächerer Vergleichssatz und daraus durch Anwendung des $O \to o$-Schlusses der gewünschte Satz. Wir beweisen die Vergleichssätze in einer Form, welche auch unmittelbar die Verträglichkeit erkennen läßt.

Bei der genauen Durchführung dieser Überlegungen zeigt es sich, daß wir zum Beweis möglichst allgemeiner Vergleichssätze noch einen weiteren Mittelwertsatz brauchen. Dieser wird in § 1 eingeführt, und es werden hinreichende Bedingungen für seine Gültigkeit angegeben. In § 2 formulieren und beweisen wir die verwendeten $O \to o$-Sätze. Der § 3 bringt eine direkte Anwendung dieses $O \to o$-Prinzips auf Mittelwertsätze. Wir haben bereits in unserer letzten Arbeit Spezialfälle des hier bewiesenen Ergebnisses zum Beweis von Aussagen über die Größenordnung limitierbarer Folgen verwendet. In § 4 beweisen wir allgemeine Vergleichssätze. Die §§ 5—7 behandeln Anwendungen, und zwar in § 5 das „first theorem of consistency“ und das „second theorem of consistency“ für Rieszsche Mittel, in § 6 den Vergleich von Nörlund-Verfahren, bewichteten arithmetischen Mitteln und die Beziehungen zwischen diesen Verfahren, in § 7 endlich den bekannten Äquivalenzsatz von Herrn M. Riesz.

[1]) Jurkat-Peyerimhoff [11].

[2]) Vgl. etwa Mazur [13], Banach [1], Zeller [16].

Aus einem der Vergleichssätze des § 4 ergibt sich ein neuer Beweis für die kürzlich von uns bewiesene Verallgemeinerung des bekannten Satzes von HARDY-BOHR. Durch ähnliche Überlegungen kann man allgemeine Sätze über Summierbarkeitsfaktoren gewinnen, welche z. B. den bekannten Satz von I. SCHUR enthalten. Die Vergleichssätze des § 4 ermöglichen es ferner, einen direkten Beweis für den Äquivalenzsatz von KNOPP-SCHNEE zu führen. Auf diese Dinge wollen wir später noch zurückkommen. Endlich sei erwähnt, daß die Ergebnisse zum großen Teil auch bei Integraltransformationen ihre Gültigkeit behalten.

1. Eine Ergänzung zu den früheren Mittelwertsätzen.

1. 1. Wir betrachten reelle Matrixtransformationen der Form

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu . \tag{1}$$

Wir sagen, daß die Transformation $A = (a_{n\nu})$ den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ erfüllt, wenn eine Abschätzung der Form

$$\mathfrak{M}: \quad \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leqq K \left| \sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu \right| \qquad (0 \leqq n' \leqq n \leqq m)$$

gilt[3]). Sachlich ist es völlig gleichbedeutend, wenn wir die rechte Seite von $\mathfrak{M}$ durch $K \cdot \operatorname{Max}_{0 \leqq \mu \leqq n} \left| \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu} s_\nu \right|$ ersetzen. Wir ziehen indessen die obige Schreibweise vor.

Hinreichende Bedingungen dafür, daß A den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ erfüllt, entnimmt man dem

Lemma 1. *Genügt die Matrix $(a_{n\nu})$ den Bedingungen*[4])

$$(\mathrm{M}_1) \qquad a_{n\nu} \neq 0, \quad 0 \leqq \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \leqq K \qquad (0 \leqq \nu \leqq n \leqq m)$$

und

$$(\mathrm{M}_2) \qquad \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \searrow \text{ für } \nu \nearrow \qquad (0 \leqq \nu \leqq n \leqq m),$$

dann gilt die Ungleichung

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leqq \frac{a_{m0}}{a_{n'0}} \left| \sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu \right| \leqq K \left| \sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu \right| \quad (0 \leqq n' \leqq n \leqq m), \tag{2}$$

so daß also $\mathfrak{M}$ erfüllt ist.

Der Beweis beruht auf einer mehrmaligen Anwendung des ABELschen Lemmas[3]).

[3]) Vgl. JURKAT-PEYERIMHOFF [11].

[4]) Das Zeichen „$\nearrow$“ („$\searrow$“) bedeutet: wächst (fällt) monoton im weiteren Sinn.

In dieser Arbeit benötigen wir neben $\mathfrak{M}$ noch einen weiteren Mittelwertsatz für normale Matrixtransformationen[5]), nämlich

$$\mathfrak{M}^*: \quad \left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right| \leqq K^* \sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}| \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n'} |a_{n'\nu}|} \quad (0 \leqq n' \leqq n \leqq m).$$

Die Ungleichung $\mathfrak{M}^*$ ist ebenfalls richtig, wenn (M_1) und (M_2) erfüllt sind. Zum Beweis dieser Behauptung werden wir zunächst das Abelsche Lemma erweitern und daraus $\mathfrak{M}^*$ ableiten.

Lemma 2. *Genügen die Zahlen η_ν und b_ν den Bedingungen*

$$\eta_\nu > 0, \quad \eta_\nu \searrow \text{ für } \nu \nearrow \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n) \tag{3}$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu > 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{4}$$

dann gilt für beliebige a_ν mit passendem n' die Ungleichung

$$\frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu a_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu b_\nu\right|} \leqq \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n'} a_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n'} b_\nu\right|}. \quad (0 \leqq n' \leqq n). \tag{5}$$

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung

$$A_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu, \quad B_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu, \quad \Delta\eta_\nu = \eta_\nu - \eta_{\nu+1} \ (0 \leqq \nu \leqq n-1), \quad \Delta\eta_n = \eta_n.$$

Durch Anwendung partieller Summation folgt

$$\frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu a_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu b_\nu\right|} = \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \Delta\eta_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n} B_\nu \Delta\eta_\nu\right|} = \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_\nu}{B_\nu} B_\nu \Delta\eta_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n} B_\nu \Delta\eta_\nu\right|} \leqq \operatorname*{Max}_{0 \leqq \nu \leqq n} \frac{|A_\nu|}{|B_\nu|}.$$

(Wegen $\Delta\eta_n > 0$, $B_n > 0$ sind die im Nenner auftretenden Summen von Null verschieden.)

Zusatz. Ist

$$\eta_\nu > 0, \quad \eta_\nu \nearrow \text{ für } \nu \nearrow \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{3'}$$

$$\sum_{\nu=k}^{n} b_\nu > 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{4'}$$

so gilt entsprechend

$$\frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu a_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu b_\nu\right|} \leqq \frac{\left|\sum_{\nu=n'}^{n} a_\nu\right|}{\left|\sum_{\nu=n'}^{n} b_\nu\right|} \quad (0 \leqq n' \leqq n). \tag{5'}$$

[5]) Diese werden durch Dreiecksmatrizen A mit $a_{nn} \neq 0$ vermittelt.

Das Wesentliche bei Lemma 2 ist, daß im Zähler und Nenner das gleiche n' genommen werden darf. Man beachte die Analogie zum zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Setzt man $b_0 = 1$, $b_\nu = 0$ $(\nu > 0)$ bzw. $b_\nu = 0$ $(\nu < n)$, $b_n = 1$, dann geht (5) bzw. (5′) in das gewöhnliche Abelsche Lemma über.

Satz 1. *Genügt die Matrix* $(a_{n\nu})$ *den Bedingungen* (M_1) *und* (M_2), *dann ist für die Transformation* A *der Mittelwertsatz* $\mathfrak{M}^*$ *(mit* $K^* = 1$*) erfüllt.*

Der Beweis kann ganz analog zu unserem früheren Beweis von Lemma 1 geführt werden: Wegen (M_1) und (M_2) gilt nach Lemma 2 die Ungleichung

$$\frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}|} = \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} a_{n\nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} |a_{n\nu}|} \leqq \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n_1} a_{n\nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n_1} |a_{n\nu}|} \quad (0 \leqq n_1 \leqq n \leqq m).$$

Diese Schlußweise iteriert, führt auf die Ungleichungen

$$(6) \qquad \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}|} \leqq \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n_{k+1}} a_{n_k \nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n_{k+1}} |a_{n_k \nu}|} \quad (n \geqq n_1 \geqq \ldots \geqq n_k \geqq n_{k+1} \geqq 0).$$

Für einen Index k gilt schließlich $n_k = n_{k+1}$ und dann ist (6) (mit $n' = n_k$) gleichbedeutend mit $\mathfrak{M}^*$.

1. 2. Wir schließen einige Bemerkungen über die Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ und ihre Beziehungen zueinander an. Dabei wollen wir folgende Bezeichnungen benutzen: Aus einer Matrix $A = (a_{n\nu})$ und einer Zahlenfolge $\alpha = \{\alpha_\nu\}$ entsteht die Matrix αA durch die Vorschrift

$$(7) \qquad \alpha A = (\alpha_n a_{n\nu})$$

und die Matrix $A\alpha$ durch die Vorschrift

$$(8) \qquad A\alpha = (a_{n\nu} \alpha_\nu).$$

(Dadurch, daß wir α vor bzw. hinter die Matrix A schreiben, wird angedeutet, daß der Index von α mit dem vorderen bzw. hinteren Index von $a_{n\nu}$ übereinstimmt.)

Zunächst erkennt man unmittelbar: Wenn $A = (a_{n\nu})$ den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ erfüllt, dann gilt dies auch für $\frac{1}{\eta} A = \left(\frac{a_{n\nu}}{\eta_n}\right)$, wo $\{\eta_n\}$ eine positive und monoton wachsende Zahlenfolge ist. Viele wichtige Matrixverfahren können als Mittelbildungen aufgefaßt werden (etwa die bewichteten arithmetischen Mittel). Wenn wir den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ für den „Zähler" dieser Mittel bewiesen haben, dann gilt $\mathfrak{M}$ i. a. auch für das Verfahren selbst, denn wir können dann für η_n die Folge

der „Gesamtgewichte" wählen. (Vgl. die bei JURKAT-PEYERIMHOFF [11] angeführten Mittelwertsätze.) Umgekehrt kann es natürlich vorkommen, daß $\mathfrak{M}$ auch noch für ηA gilt. Dies tritt z. B. ein, wenn man bei der obigen Mittelbildung wieder zum Zähler übergeht, also mit dem Gesamtgewicht multipliziert. Ein anderes Beispiel entnehmen wir Lemma 1: unter den Voraussetzungen (M_1) und (M_2) erfüllt auch die Matrix $\alpha A = \left(\frac{a_{mv}}{a_{m0}}\right)$ den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$. Hier ist $\alpha_m = \frac{1}{a_{m0}}$ sicher unbeschränkt, wenn A permanent ist.

Betrachten wir die Matrizen αA, so entsteht also aus $\mathfrak{M}$ eine ganze Skala von Mittelwertsätzen, die teils schwächer, teils stärker als $\mathfrak{M}$ sind. Beim Mittelwertsatz $\mathfrak{M}^*$ liegen die Dinge anders, da dieser homogen in den Elementen der Matrix ist: Die Matrizen A und αA (mit $\alpha_\nu \neq 0$) erfüllen gleichzeitig $\mathfrak{M}^*$.

Wenn man daher $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ vergleichen will, ist es sinngemäß, die (normale) Matrix A zu normieren. Wir nehmen etwa an, daß die Zeilennormen die Größenordnung 1 besitzen, daß also

$$0 < \varepsilon \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| \leqq K$$

ist. Dies ist für alle permanenten Matrizen der Fall. Man erkennt sofort, daß dann $\mathfrak{M}^*$ eine Verschärfung von $\mathfrak{M}$ bedeutet. (Ohne die angegebene Normierung hätte man nur schließen können, daß aus $\mathfrak{M}^*$ die Gültigkeit von $\mathfrak{M}$ für $\left(\frac{a_{n\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}|}\right)$ folgt.) Umgekehrt kann man in manchen Fällen aus $\mathfrak{M}$ für αA $\left(\text{mit } \alpha_m = \frac{1}{a_{m0}}\right)$ wieder $\mathfrak{M}^*$ für A folgern. Dies ist z. B. bei den unstetigen RIESZschen Mitteln $R_\lambda^\varkappa$ $(0 < \varkappa \leqq 1)$ möglich.

Es liegt nahe, die beiden Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ formal zusammenzufassen zu dem allgemeinen Mittelwertsatz

$$\mathfrak{M}\, g: \quad \left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right| \leqq K \cdot g_{mn} \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu\right|}{g_{n'n'}} \quad (0 \leqq n' \leqq n \leqq m)$$

mit $0 \leqq g_{mn} \leqq g_{mm}$, $g_{mm} \neq 0$ $(0 \leqq n \leqq m)$.

Die Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ entsprechen der speziellen Wahl

$$g_{mn} = 1 \quad \text{bzw.} \quad g_{mn} = \sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}| \quad (A \text{ normal}).$$

Aus $\mathfrak{M}\, g$ folgt, daß die Matrix αA mit $\alpha_m = \frac{1}{g_{mm}}$ den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ erfüllt. Für $g_{mn} = \sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}|$ ist dieser Zusammenhang schon oben genannt.

2. Allgemeine $O \to o$-Sätze.

2. 1. In diesem Paragraphen betrachten wir auch nicht zeilenfinite Matrixtransformationen

$$A_n(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu . \tag{9}$$

Das Wirkfeld $o(A)$ der Transformation $A = (a_{n\nu})$ besteht aus allen Folgen $\{s_\nu\}$, für die $A_n(s)$ für alle n existiert und

$$A_n(s) = o(1) \qquad (n \to \infty) \tag{10}$$

ist. Wir schreiben kurz

$$s \in o(A). \tag{11}$$

Das Wirkfeld $O(A)$ besteht aus allen Folgen s, für die $A_n(s)$ für alle n existiert und

$$A_n(s) = O(1) \qquad (n \to \infty) \tag{12}$$

ist. Wir schreiben kurz

$$s \in O(A). \tag{13}$$

Die Matrix $(a_{n\nu})$ erfüllt die Spaltenbedingung Sp_0, wenn gilt

Sp_0: $\qquad a_{n\nu} \to 0$ für $n \to \infty$, ν fest.

Bei den folgenden Untersuchungen werden wir von der Tatsache Gebrauch machen, daß die Wirkfelder vieler bekannter Matrixtransformationen eine besonders übersichtliche Struktur besitzen, daß nämlich die abbrechenden Folgen darin überall dicht liegen. Transformationen mit dieser Eigenschaft nennen wir perfekt. Genauer definieren wir:

Eine normale Transformation $A = (a_{n\nu})$ heißt perfekt, wenn sie die Bedingung Sp_0 erfüllt, und wenn es zu jeder Folge $s \in o(A)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abbrechende Folge $g = \{g_\nu\}$ ($g_\nu = 0$ für $\nu > \nu_0$) gibt, so daß für die transformierten Folgen $A_n(s)$ und $A_n(g)$ gilt:

$$\overline{\operatorname{fin}}_n \, |A_n(s) - A_n(g)| < \varepsilon. \tag{14}$$

(*Wegen* Sp_0 *liegt* g *in* $o(A)$.)

Zur Feststellung der Perfektheit besitzen wir das folgende Kriterium:

Lemma 3. *Eine Transformation $A = (a_{n\nu})$, die normal ist und Sp_0 erfüllt, ist genau dann perfekt, wenn die Bedingungen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty \tag{15}$$

und

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{16}$$

stets

$$\alpha_n = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{17}$$

nach sich ziehen.

Der Begriff der Perfektheit wurde erstmalig von Mazur [13] verwendet. Mazur bewies in dieser Arbeit die Perfektheit der Cesàroschen und der Euler-Knoppschen Verfahren. Bei Mazur und Banach [1] wird die Bedingung von Lemma 3 zur Definition der Perfektheit verwendet. Die hier angegebene Definition findet sich bei Hill [8] und Peyerimhoff [14][6]).

Perfektheitsaussagen für einige Klassen von Verfahren erhält man aus den folgenden Lemmas:

Lemma 4. *Jede normale Transformation, welche* Sp_0 *und* $\mathfrak{M}$ *erfüllt, ist perfekt.*

(Peyerimhoff [14].)

Lemma 5. *Jede normale permanente Transformation, welche* Sp_0 *erfüllt, ist perfekt, wenn die Spalten ihrer Inversen beschränkt sind.*

(Peyerimhoff [14].)

Der Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ ist erfüllt bei den unstetigen Rieszschen Mitteln $R_\lambda^\varkappa$ mit $0 < \varkappa \leqq 1$ (vgl. Jurkat [10]), bei den bewichteten arithmetischen Mitteln, ferner bei den Nörlund-Verfahren $N(p_n)$ mit[7])

$$0 < p_n \searrow, \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} \nearrow \text{ für } n \nearrow, \tag{18}$$

(insbesondere bei den Cesàroschen Verfahren C_k mit $0 \leqq k \leqq 1$). Nach Lemma 4 sind also diese Verfahren (wenn sie Sp_0 erfüllen) perfekt[8]). Aus dem Lemma 5 folgt, daß konvergenzgleiche normale Verfahren und die Cesàroschen Verfahren beliebiger Ordnung perfekt sind.

Beim Beweis des folgenden Satzes 2 benötigen wir ein im wesentlichen mit dem Satz von Toeplitz übereinstimmendes Lemma:

Lemma 6. 1°. *Die Bedingung*

$$\mathrm{Zn}: \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \leqq K \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

[6]) In diesen Arbeiten wird das Kriterium allerdings unter der Voraussetzung, daß A permanent ist, bewiesen. Für Matrizen, die nur Sp_0 erfüllen, verläuft der Beweis ganz entsprechend.

[7]) Vgl. Jurkat-Peyerimhoff [11]. Dort wurde gezeigt, daß die Bedingungen

$$p_n > 0, \quad \frac{p_{n+\mu}}{p_n} \nearrow \text{ für } n \nearrow, \quad \frac{p_{n+\mu}}{p_n} \leqq K \qquad (\mu \geqq 0) \tag{18'}$$

für $\mathfrak{M}$ hinreichend sind. Man überzeugt sich leicht, daß die Bedingungen (18) und (18') gleichwertig sind.

[8]) Die „Zähler" dieser Verfahren erfüllen ebenfalls $\mathfrak{M}$ und sind deshalb, als neue Verfahren aufgefaßt, ebenfalls perfekt, soweit sie Sp_0 erfüllen.

ist notwendig und hinreichend dafür, daß $A_n(s)$ für jede Nullfolge s existiert und beschränkt bleibt. Das gleiche gilt, wenn man die beschränkten Folgen s betrachtet.

2°. *Die Bedingungen* Zn *und*

Sp: $$a_{n\nu} \to a_\nu \quad \text{für} \quad n \to \infty, \quad \nu \text{ fest},$$

sind notwendig und hinreichend dafür, daß $A_n(s)$ für jede Nullfolge s existiert und konvergiert. Es ist dann

$$\lim_{n\to\infty} A_n(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu s_\nu . \tag{19}$$

2. 2. Satz 2. *$A = (a_{n\nu})$ sei eine beliebige Transformation. $B = (b_{n\nu})$ sei normal, und es sei*[9])

$$o(B) \leqq O(A). \tag{20}$$

G sei eine Teilmenge der Wirkfelder $o(B)$ und $o(A)$, also

$$G \leqq o(B), \quad G \leqq o(A). \tag{21}$$

Dann liegt jedes Element $s \in o(B)$, zu dem es Elemente g^r $(r = 0, 1, \ldots)$ aus G gibt mit

$$\overline{\operatorname{fin}}_n \, |B_n(s) - B_n(g^r)| = o(1) \quad \text{für} \quad r \to \infty, \tag{22}$$

in $o(A)$.

Beweis. Aus (20) folgt, daß $A_n(s)$ für jedes $s \in o(B)$ und $n = 0, 1, \ldots$ existiert. Mit Hilfe der inversen Transformation

$$s_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} b'_{\nu\mu} B_\mu(s)$$

ergibt sich

$$A_n(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} b'_{\nu\mu} B_\mu(s) = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} b'_{\nu\mu} B_\mu(s) + o(1)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{k} B_\mu(s) \sum_{\nu=\mu}^{k} a_{n\nu} b'_{\nu\mu} + o(1).$$

Auf der rechten Seite steht (bei festem n, für $k \to \infty$) eine konvergenztreue Transformation der Nullfolge $\{B_\mu(s)\}$. Aus Lemma 6 folgt wegen Sp, daß

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_{n\nu} b'_{\nu\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots) \tag{23}$$

konvergiert, und wegen (19) gilt dann

$$A_n(s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} B_\mu(s) \sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_{n\nu} b'_{\nu\mu}. \tag{24}$$

[9]) Beziehungen zwischen Mengen bezeichnen wir mit „$\leqq$“ (Teilmenge), „$<$“ (echte Teilmenge) und „$=$“ (Gleichheit).

Daraus folgt wegen (20) nach Lemma 6 die Ungleichung

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} |\sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_{n\nu} b'_{\nu\mu}| \leqq K \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{25}$$

und daher

$$\overline{\operatorname{fin}}_n |A_n(s)| \leqq K \overline{\operatorname{fin}}_n |B_n(s)|. \tag{26}$$

Für ein passendes r gilt schließlich wegen (22) und (26) die Ungleichung

$$\begin{aligned} |A_n(s)| &\leqq |A_n(s - g^r)| + |A_n(g^r)| \leqq K \overline{\operatorname{fin}} |B_n(s - g^r)| + |A_n(g^r)| \\ &\leqq K\varepsilon + |A_n(g^r)|. \end{aligned} \tag{27}$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus (21), da $A_n(g^r) \to 0$ für $n \to \infty$ [10]).

Eine unmittelbare Folge des Satzes 2 ist

Satz 3. *$A = (a_{n\nu})$ sei eine beliebige Transformation, welche die Bedingung* Sp_0 *erfüllt. $B = (b_{n\nu})$ sei normal und perfekt, und es sei*

$$o(B) \leqq O(A). \tag{28}$$

Dann gilt auch

$$o(B) \leqq o(A). \tag{29}$$

Beweis. Die Bedingung (22) ist wegen der Perfektheit von B für jedes $s \in o(B)$ erfüllt, wenn G aus den abbrechenden Folgen besteht. Diese Folgen liegen in $o(A)$, da A die Bedingung Sp_0 erfüllt, so daß auch (21) gilt. Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.

Zusatz. Wenn A und B permanent sind, ist $A \geqq B$ [11]) und A ist mit B verträglich. Hierin ist ein bekannter Satz von Mazur über Verträglichkeit enthalten, bei dem aus der Perfektheit von B auf die Verträglichkeit geschlossen wird [12]). Das wesentliche Ergebnis von Satz 3 liegt aber weniger im Beweis der Verträglichkeit, als darin, daß wir aus der O-Abschätzung (28) die entsprechende o-Abschätzung (29) gewinnen konnten. Gerade dieses $O \to o$-Prinzip wird für die späteren Anwendungen bedeutungsvoll werden.

Wir können Satz 3 in etwas speziellerer Form auch so formulieren: *Eine normale Transformation $C = (c_{n\nu})$ ist nulltreu, wenn sie die Bedingung* Zn *erfüllt, und wenn C durch zwei normale Transformationen A und B in der Form $C = AB^{-1}$ dargestellt werden kann, wobei A die Bedingung* Sp_0 *erfüllt und B perfekt ist.* (Wenn B die Einheitsmatrix ist, erhalten wir hierdurch gerade den Toeplitzschen Satz für nulltreue Matrizen.)

---

[10]) Vgl. hierzu Banach [1], Kap. 5, th. 3.

[11]) $A > B$ bedeutet, daß jede B-limitierbare Folge auch A-limitierbar ist. Wenn es überdies A-limitierbare Folgen gibt, die nicht B-limitierbar sind, verwenden wir die Bezeichnung $A > B$. Sind A und B äquivalent, dann schreiben wir $A \approx B$.

[12]) Vgl. Mazur [13], Banach [1] (Kap. 5, th. 12) und Zeller [16].

Die Sätze 2 und 3 behalten ihre Gültigkeit, wenn A eine Matrixtransformation $A = (a_{tv})$ mit stetigem erstem Parameter ist. Wir nehmen etwa an, daß t alle Werte einer Zahlenmenge T durchlaufen soll und daß das Konvergenzverhalten der Transformierten $A_t(s) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{tv} s_v$ bei Annäherung von t an einen Häufungspunkt τ von T untersucht wird. $A_t(s)$ konvergiert bekanntlich genau dann für $t \to \tau$, wenn dies für jede Folge $\{t_n\}$ $(t_n \in T)$, die für $n \to \infty$ gegen τ strebt, der Fall ist. Wir dürfen uns also auf die durch $(a_{t_n v})$ dargestellten Matrixtransformationen beschränken, und auf diese können wir die Sätze 2 und 3 anwenden und erhalten dann aus den angegebenen Voraussetzungen die Konvergenz von $A_{t_n}(s)$ für jede Folge $t_n \to \tau$, und damit auch die Konvergenz von $A_t(s)$ für $t \to \tau$.

Entsprechendes gilt in späteren Fällen.

3. $O \to o$-Schlüsse bei Mittelwertsätzen.

Wir wollen zunächst normale Transformationen betrachten, welche $\mathfrak{M}$ und Sp_0 erfüllen. Für jedes $s \in o(A)$ folgt aus $\mathfrak{M}$ die Beziehung

$$\sum_{v=0}^{n} a_{mv} s_v = O(1) \quad \text{für } m \to \infty \text{ (gleichmäßig in } n). \tag{30}$$

Wenn A die für $\mathfrak{M}$ hinreichenden Bedingungen (M_1) und (M_2) erfüllt, dann folgt aus (2), daß (30) verschärft werden kann[13]:

$$\sum_{v=0}^{n} a_{mv} s_v = o(1) \quad \text{für } m \to \infty \text{ (gleichmäßig in } n). \tag{31}$$

Herr Zeller[14] hat bemerkt, daß (31) bereits richtig ist, wenn A nur $\mathfrak{M}$ erfüllt. Die Beziehung (31) ist eine wichtige Verschärfung des Mittelwertsatzes $\mathfrak{M}$. Wir haben früher gezeigt, daß sich aus (31) unmittelbar Aussagen über die Größenordnung limitierbarer Folgen ergeben[13].

Auch im Hinblick auf die Perfektheit ist (31) von Bedeutung. Wir wissen zwar, daß aus $\mathfrak{M}$ die Perfektheit von A folgt, aber wir können über die bei der Approximation (14) zu verwendenden abbrechenden Folgen g nichts aussagen. Aus (31) folgt nun, daß (14) erfüllt ist, wenn wir für g die Folgen einsetzen, die aus $s = \{s_v\}$ dadurch entstehen, daß wir von einer hinreichend späten Stelle an die Elemente s_v durch Null ersetzen[14].

Der Schluß von (30) auf (31) ist weiter für Vergleichssätze (§ 4) von Bedeutung. Um unnötige Einschränkungen zu vermeiden, werden wir dort aber die $O \to o$-Sätze von § 2 heranziehen, die es uns auch erlauben, die Beziehung (31) aus (30) abzuleiten. Allgemeiner können wir sogar genaue Bedingungen angeben, wann Mittelwertsätze vom Typ $\mathfrak{M}g$ (§ 1) eine ähnliche Verschärfung zulassen.

---

[13] Jurkat-Peyerimhoff [11].

[14] Zeller [17].

Satz 4. Voraussetzung: *Die Transformation* $A = (a_{nv})$ *sei normal und erfülle einen Mittelwertsatz vom Typ*

$$\mathfrak{M}g: \quad \left|\sum_{v=0}^{n} a_{mv} s_v\right| \leqq K \cdot g_{mn} \frac{\left|\sum_{v=0}^{n'} a_{n'v} s_v\right|}{g_{n'n'}} \qquad (0 \leqq n' \leqq n \leqq m)$$

$$\text{mit } 0 \leqq g_{mn} \leqq g_{mm}, \; g_{mm} \neq 0 \qquad (0 \leqq n \leqq m).$$

Es sei $n(m) \leqq m$ *eine feste Funktion mit* $n(m) \to \infty$ *für* $m \to \infty$, *ferner gelte*

$$a_{nk} = o(g_{nn}) \qquad (n \to \infty, \; k \text{ fest}) \tag{32}$$

und

$$g_{mn} \neq 0 \qquad (n = n(m)). \tag{33}$$

Behauptung: *Notwendig und hinreichend dafür, daß aus*

$$A_n(s) = \sum_{v=0}^{n} a_{nv} s_v = o(g_{nn}) \tag{34}$$

stets

$$\sum_{v=0}^{n} a_{mv} s_v = o(g_{mn}) \qquad (m \to \infty, \; n = n(m)) \tag{35}$$

folgt, ist

$$a_{mk} = o(g_{mn}) \quad (m \to \infty, \; n = n(m), \; k \text{ fest}). \tag{36}$$

Beweis. Die Notwendigkeit von (36) ergibt sich, wenn man in (35) für s die speziellen Folgen $s^k = \{\delta_{kv}\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ einsetzt[15]). Um zu zeigen, daß (36) hinreicht, betrachten wir die Matrizen $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{nv} \\ g_{nn} \end{pmatrix}$ und $A^* = (a^*_{mk})$, wobei $a^*_{mk} = \frac{a_{mk}}{g_{mn}}$ für $k \leqq n = n(m)$ und sonst gleich 0 gesetzt ist. Die Behauptung (35) geht dann über in

$$o(\tilde{A}) \leqq o(A^*). \tag{37}$$

Zum Beweis von (37) wenden wir den Satz 3 an. Die Matrizen $\tilde{A}$ und A^* erfüllen wegen (32) und (36) die Bedingung Sp_0. $\tilde{A}$ erfüllt den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ (vgl. § 1) und ist deshalb nach Lemma 4 perfekt. Wir müssen also nur noch den Nachweis erbringen, daß $o(\tilde{A}) \leqq O(A^*)$ ist, und diese Beziehung folgt sofort aus $\mathfrak{M}g$.

Zusatz. Wenn (36) und (33) für alle Funktionen $n = n(m)$ mit $n(m) \to \infty$ für $m \to \infty$ gilt, dann gilt (35) gleichmäßig für diese Funktionen.

Im Spezialfall $g_{mn} = 1$ geht $\mathfrak{M}g$ über in $\mathfrak{M}$, und wir erhalten durch Satz 4 gerade die zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Beziehung zwischen (30) und (31).

[15]) $\delta_{kv} = 1$ für $v = k$ und sonst 0.

Wählen wir $g_{mn} = \sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}|$, dann erhalten wir die entsprechende o-Beziehung für $\mathfrak{M}^*$, aber die Voraussetzungen (32) und (36) sind hier nicht von selbst erfüllt [16]). Wir wollen etwa annehmen, daß $a_{n\nu} \neq 0$ und $|a_{n\nu}| \nearrow$ für $\nu \nearrow$ gilt ($\nu \leqq n$). Aus der Abschätzung

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}| \geqq (n(m) - k)\,|a_{mk}| \qquad (\text{für } n > k)$$

folgt dann (32) und (36).

4. Allgemeine Vergleichssätze.

4. 1. Wir wollen in diesem Paragraphen als Anwendung von Satz 3 einige Vergleichssätze vom Typ

$$O(B) \leqq O(A) \tag{38}$$

bzw.

$$o(B) \leqq o(A) \tag{39}$$

beweisen. Die Beziehung (39) ist i. a. richtig, wenn B perfekt ist und wenn $o(B) \leqq O(A)$ ist (vgl. Satz 3). Die zuletzt genannte Bedingung folgt aber aus $O(B) \leqq O(A)$.

Im folgenden werden wir stets voraussetzen, daß die Matrix B einen der Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^*$ erfüllt. Dadurch erreichen wir zweierlei: einmal ist die Perfektheitsvoraussetzung für B i. a. von selbst erfüllt und zum anderen lassen sich besonders übersichtliche Bedingungen für $O(B) \leqq O(A)$ angeben.

Jeder Vergleichssatz der Form (39) schließt von der Konvergenz der Folge $\{B_n(s)\}$ auf die Konvergenz von $\{A_n(s)\}$. Eine Verallgemeinerung dieses Zusammenhanges erhalten wir, wenn wir aus der Konvergenz von $B_n(s)$ mit einer gewissen „Geschwindigkeit" eine entsprechende Aussage über $A_n(s)$ ableiten können. Im einfachsten Fall soll dies bedeuten: Aus

$$B_n(s) = o(\eta_n), \quad o < \eta_n \nearrow \qquad (n \to \infty) \tag{40}$$

folgt stets

$$A_n(s) = o(\eta_n) \qquad (n \to \infty). \tag{41}$$

Wir schreiben kurz

$$o(B) \leqq o(A) \quad [\eta_n]. \tag{42}$$

---

[16]) Es gibt permanente Matrizen, welche sogar (M_1) und (M_2) erfüllen, ohne daß (36) gilt.

Jeden Vergleichssatz vom Typ (42) können wir aber als gewöhnlichen Vergleichssatz (ohne Geschwindigkeit) auffassen, denn (42) ist gleichbedeutend mit

$$o\left(\frac{1}{\eta} B\right) \leqq o\left(\frac{1}{\eta} A\right). \tag{43}$$

Aus jedem Vergleichssatz (39) folgt also eine ganze Skala von Vergleichssätzen (42), wenn die Matrizen $\frac{1}{\eta} A$ und $\frac{1}{\eta} B$ die für die Gültigkeit von (39) nötigen Voraussetzungen erfüllen. Dies wird im folgenden stets der Fall sein, so daß also mit A und B auch stets $\frac{1}{\eta} A$ und $\frac{1}{\eta} B$ die angegebenen Voraussetzungen erfüllen. Insbesondere sei bemerkt, daß $\frac{1}{\eta} A$ den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^*$ erfüllt, wenn dies von A gilt (§ 1). Dasselbe gilt für die Bedingung Sp_0.

Zu den Vergleichssätzen (38) gibt es eine ganz entsprechende Verallgemeinerung der Form

$$O(B) \leqq O(A) \quad [\eta_n] \tag{44}$$

und diese kann in derselben Weise auf $O\left(\frac{1}{\eta} B\right) \leqq O\left(\frac{1}{\eta} A\right)$ zurückgeführt werden.

Satz 5. *Die Transformationen A und B seien dreieckig. B erfülle $\mathfrak{M}$ und es sei $b_{n\nu} \neq 0$ für $\nu \leqq n$. Dann folgt aus*

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left| \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right) \right| = O(1) \text{ für } n \to \infty \qquad \left(\Delta_\nu \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} = \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \text{ für } \nu = n\right) \tag{45}$$

die Beziehung

$$O(B) \leqq O(A) \quad [\eta_n]. \tag{46}$$

Erfüllen A und B überdies noch die Bedingung Sp_0, dann gilt

$$o(B) \leqq o(B) \quad [\eta_n]. \tag{47}$$

Beweis. Die Beziehung (46) folgt durch partielle Summation und Anwendung von $\mathfrak{M}$ aus (45):

Für $s \in O(B)$ ist

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu \right| = \left| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} b_{n\nu} s_\nu \right| = \left| \sum_{\nu=0}^{n} \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu} s_\mu \right|$$

$$= O(1) \sum_{\nu=0}^{n} \left| \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right) \right| = O(1).$$

Wenn A und B die Bedingung Sp_0 erfüllen, dann sind die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt, da B nach Lemma 4 perfekt ist. Aus jenem Satz folgt dann die Behauptung (47) unmittelbar.

Zusatz. Die Bedingung (45) ist erfüllt, wenn der Quotient $\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}$ monoton in ν und beschränkt ist. Bei der Untersuchung spezieller Verfahren ist es oft sehr viel einfacher, die Monotonie von einer Stelle an als von Anfang an nachzuweisen. Im Hinblick auf diese Tatsache ist es von Bedeutung, daß (45) bereits richtig ist, wenn gilt:

$$\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \text{ monoton in } \nu \text{ für } \nu_0 \leqq \nu \leqq n - n_0 \tag{48}$$

(ν_0 und n_0 unabhängig von n)

und

$$0 \leqq \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \leqq K \qquad (0 \leqq \nu \leqq n). \tag{49}$$

(Es versteht sich von selbst, daß es völlig ausreicht, wenn (48) und (49) nur für alle großen n erfüllt sind. Wir werden dies nicht jedesmal betonen.)

Bemerkung zu Satz 5. Setzt man $A = B\varepsilon = (b_{n\nu}\varepsilon_\nu)$, dann geht (45) nach kurzer Umformung über in

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\Delta\varepsilon_\nu| = O(1), \tag{50}$$

und (47) in

$$o(B) \leqq o(B\varepsilon) \quad [\eta_n]. \tag{51}$$

(Die Beziehung (51) bleibt richtig, wenn die Bedingung $b_{n\nu} \neq 0$ für $\nu \leqq n$ nicht erfüllt, B aber normal ist, wie man durch eine kleine Abänderung des obigen Beweises erkennt.)

Auf Grund dieser Bemerkung läßt sich unser Beweis für eine Verallgemeinerung des Hardy-Bohrschen Satzes vereinfachen [17]).

Satz 6. *Die Transformationen A und B seien dreieckig. B erfülle* $\mathfrak{M}^*$, *und es sei $b_{n\nu} \neq 0$ für $\nu \leqq n$. Ferner sei*

$$\sum_{\nu=0}^{m} |b_{m\nu}| = O\left(\sum_{\nu=0}^{n} |b_{n\nu}|\right) \qquad (0 \leqq n \leqq m) \tag{52}$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| = O\left(\sum_{\nu=0}^{n} |b_{n\nu}|\right). \tag{53}$$

Dann folgt aus

$$\sum_{\nu=\mu}^{n} \left|\Delta_\nu\left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right)\right| = O\left(\frac{a_{n\mu}}{b_{n\mu}}\right) + O(1) \qquad (0 \leqq \mu \leqq n) \tag{54}$$

die Beziehung

$$O(B) \leqq O(A) \quad [\eta_n]. \tag{55}$$

Erfüllen A und B überdies noch die Bedingung Sp_0, *dann gilt*

$$o(B) \leqq o(A) \quad [\eta_n]. \tag{56}$$

[17]) Jurkat-Peyerimhoff [11], Satz 9 und 11.

Beweis. Die Beziehung (55) folgt aus den Voraussetzungen durch Anwendung von $\mathfrak{M}^*$ auf Grund der folgenden Abschätzungen:

Für $s \in O(B)$ ist

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu \right| = \left| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} b_{n\nu} s_\nu \right| = \left| \sum_{\nu=0}^{n} \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu} s_\mu \right|$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \left| \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \right) \right| \cdot O(1) \frac{\sum_{\mu=0}^{\nu} |b_{n\mu}|}{\sum_{\varrho=0}^{n'} |b_{n'\varrho}|} = \frac{O(1)}{\sum_{\varrho=0}^{n} |b_{n\varrho}|} \sum_{\mu=0}^{n} |b_{n\mu}| \sum_{\nu=\mu}^{n} \left| \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \right) \right|$$

$$= \frac{O(1)}{\sum_{\varrho=0}^{n} |b_{n\varrho}|} \left(\sum_{\mu=0}^{n} |a_{n\mu}| + \sum_{\mu=0}^{n} |b_{n\mu}| \right) = O(1).$$

Zum Beweis von (56) bemerken wir zunächst, daß B wegen (52) den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ erfüllt: wenn also A und B die Bedingung Sp_0 erfüllen, dann sind die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt, da B wegen $\mathfrak{M}$ perfekt ist. Aus jenem Satz folgt dann unmittelbar die Behauptung (56).

Zusatz. Die Bedingungen (52) und (53) sind erfüllt, wenn A und B permanent sind.

Die Bedingung (54) ist erfüllt, wenn (45) erfüllt ist; insbesondere folgt (54) aus (48) und (49). Ferner ist (54) erfüllt, wenn (für alle großen n) gilt:

(57) $$0 \leqq \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \searrow \text{ für } \nu \nearrow \qquad (\nu_0 \leqq \nu \leqq n - n_0)$$

(ν_0 und n_0 unabhängig von n),

(58) $$0 \leqq \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \leqq K \qquad (n - n_0 < \nu \leqq n),$$

(59) $$\frac{a_{n\,\nu+1}}{b_{n\,\nu+1}} \leqq M \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \qquad (0 \leqq \nu < \nu_0).$$

(Für $\nu_0 = 0$ fällt (59) und für $n_0 = 0$ fällt (58) weg.)

Diese Bedingungen unterscheiden sich insofern von (48) und (49), als von $\frac{a_{n0}}{b_{n0}}$ nicht Beschränktheit verlangt wird, vielmehr darf dieser Quotient mit wachsendem n groß werden. Bei Anwendungen liegt dieser Fall öfters vor, und das gab uns den Anlaß zur Aufstellung des Mittelwertsatzes $\mathfrak{M}^*$.

Mit den folgenden Bemerkungen wollen wir einige Erweiterungen der Sätze 5 und 6 andeuten.

Wenn wir in den Sätzen 5 und 6 die Bedingung Sp_0 ersetzen durch

$$a_{n\nu} = o(\mu_n),\ b_{n\nu} = o(\mu_n) \qquad (n \to \infty),$$

wo μ_n monoton wächst und unbeschränkt ist ($\mu_n > 0$), dann können wir (47) und (56) nur für solche Folgen η_n beweisen, die stärker als μ_n wachsen, für die also $\mu_n = O(\eta_n)$ gilt.

Erfüllen zwei Matrizen A und B die Voraussetzungen von Satz 6 bis auf (52) und (53), dann kann man stets zu Matrizen $\frac{1}{\beta} B$ und $\frac{1}{\alpha} A$ übergehen, die alle Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllen. $\left(\text{Man setze z. B. } \beta_n = \sum_{\nu=0}^{n} |b_{n\nu}|, \alpha_n = \sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}|.\right)$ So erhalten wir den Vergleichssatz

$$o\left(\frac{1}{\beta} B\right) \leqq o\left(\frac{1}{\alpha} A\right) \quad [\eta_n],$$

d. h. aus $B_n(s) = o(\beta_n \eta_n)$ folgt stets $A_n(s) = o(\alpha_n \eta_n)$. Die „Geschwindigkeiten" sind hier verschieden.

Schließlich kann man noch daran denken, sich von der Einschränkung, daß A dreieckig sein soll, zu befreien. Dabei erhält man allerdings kompliziertere Bedingungen. Zunächst muß verlangt werden, daß $A_n(s)$ für jedes $s \in O(B)$ existiert. Dann kann man durch partielle Summation die folgende Umformung ausführen

$$A_n(s) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{a_{n\nu}}{b_{m\nu}} b_{m\nu} s_\nu + O(1) = \sum_{\nu=0}^{m} \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{m\nu}}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} b_{m\mu} s_\mu + O(1),$$

wobei m in Abhängigkeit von n so gewählt sei, daß die Abschätzung für $n \to \infty$ richtig ist. Auf die rechte Seite kann man einen der Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{M}^*$ anwenden. Man muß nun verlangen, daß die auf diese Weise erhaltene Bedingung für alle derartigen Funktionen $m(n)$ gilt (diese hängen noch von s ab).

4. 2. Das folgende Lemma erlaubt uns in vielen Fällen die Feststellung, ob eine Beziehung $o(B) \leqq o(A)$ zu $o(B) < o(A)$ verschärft werden kann.

Lemma 7. *Die Transformationen A und B seien dreieckig und A sei normal. Dann folgt aus*

$$o(B) \leqq o(A) \quad [\eta_n] \tag{60}$$

und

$$b_{nn} \neq O(a_{nn}) \tag{61}$$

die Beziehung

$$o(B) < o(A) \quad [\eta_n]. \tag{62}$$

In (60) *und* (62) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Wäre (62) nicht richtig, dann müßte nach Lemma 6 die Folge der Diagonalglieder der Transformation BA^{-1} beschränkt bleiben. Dies widerspricht (61), denn diese Diagonalglieder sind $\frac{b_{nn}}{a_{nn}}$. Die Behauptung über O folgt ebenso.

Zusatz. Die Bedingung (61) ist sicherlich erfüllt, wenn B normal ist und $\frac{a_{nn}}{b_{nn}} \to 0$ für $n \to \infty$.

Aus den Sätzen 5 und 6 können Äquivalenzsätze abgeleitet werden. Wenn nämlich der Quotient $\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}$ die Bedingungen (48), (49) bzw. (57), (58), (59) erfüllt, dann ist i. a. $o(B) \leqq o(A)$. Ebenso kann man hin-

reichende Bedingungen für $\frac{a_{nv}}{b_{nv}}$ angeben, welche die Richtigkeit von $o(B) \geqq o(A)$ nach sich ziehen (indem man in den genannten Bedingungen (48), ..., (59) a_{nv} mit b_{nv} vertauscht). Auf diese Weise erhält man die folgenden Äquivalenzsätze (mit vereinfachten Voraussetzungen).

Satz 7. *Erfüllen die dreieckigen Transformationen A und B den Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ und die Bedingung* Sp_0 *und ist* $a_{nv} \neq 0$, $b_{nv} \neq 0$ $(v \leqq n)$, *dann folgt aus*

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{a_{nv}}{b_{nv}} \leqq K \qquad (0 \leqq v \leqq n) \tag{63}$$

und

$$\frac{a_{nv}}{b_{nv}} \text{ monoton in } v \qquad (v_0 \leqq v \leqq n - n_0) \tag{64}$$

die Beziehung

$$o(B) = o(A) \quad [\eta_n]. \tag{65}$$

In (65) *darf o durch O ersetzt werden.*

Satz 8. *Die dreieckigen Transformationen A und B seien permanent, und es sei $a_{nv} \neq 0$, $b_{nv} \neq 0$ $(v \leqq n)$. Dann sind die Beziehungen*

$$o(B) = o(A) \quad [\eta_n] \text{ und } O(B) = O(A) \quad [\eta_n] \tag{66}$$

sicher richtig, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1°. *A erfüllt $\mathfrak{M}$ und B erfüllt $\mathfrak{M}^*$, und es ist*

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{a_{nv}}{b_{nv}} \qquad (0 \leqq v \leqq n), \tag{67}$$

$$\frac{a_{n\,v+1}}{b_{n\,v+1}} \leqq K \frac{a_{nv}}{b_{nv}} \qquad (0 \leqq v < v_0), \tag{68}$$

$$\frac{a_{nv}}{b_{nv}} \searrow \text{ für } v \nearrow \qquad (v_0 \leqq v \leqq n - n_0), \tag{69}$$

$$\frac{a_{nv}}{b_{nv}} \leqq K \qquad (n - n_0 < v \leqq n); \tag{70}$$

2°. *A erfüllt $\mathfrak{M}^*$ und B erfüllt $\mathfrak{M}$, und es ist*

$$0 \leqq \frac{a_{nv}}{b_{nv}} \leqq K \qquad (0 \leqq v \leqq n), \tag{71}$$

$$\frac{a_{nv}}{b_{nv}} \leqq K \frac{a_{n\,v+1}}{b_{n\,v+1}} \qquad (0 \leqq v < v_0), \tag{72}$$

$$\frac{a_{nv}}{b_{nv}} \nearrow \text{ für } v \nearrow \qquad (v_0 \leqq v \leqq n - n_0), \tag{73}$$

$$\frac{a_{nv}}{b_{nv}} \geqq \varepsilon > 0 \qquad (n - n_0 < v \leqq n). \tag{74}$$

(Für $v_0 = 0$ fällt (68) *bzw.* (72) *und für $n_0 = 0$ fällt* (70) *bzw.* (74) *weg.)*

Bemerkung. Die Voraussetzungen 1° und 2° sind bezüglich der Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ unsymmetrisch. Sie sind aber jedenfalls erfüllt, wenn A und B die Bedingungen (M_1) und (M_2) erfüllen.

Zum Schluß wollen wir die Vergleichssätze ihrem Typus nach zusammenstellen:

$$o(B) < o(A)\ [\eta_n], \text{ wenn } \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \to 0 \quad \text{und} \quad \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \searrow \text{ für } \nu \nearrow;$$

$$o(B) = o(A)\ [\eta_n], \text{ wenn } \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \geqq \varepsilon > 0 \text{ und } \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \searrow \text{ für } \nu \nearrow;$$

$$o(B) = o(A)\ [\eta_n], \text{ wenn } \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \leqq K \quad \text{und} \quad \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \nearrow \text{ für } \nu \nearrow;$$

$$o(B) > o(A)\ [\eta_n], \text{ wenn } \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \to \infty \quad \text{und} \quad \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \nearrow \text{ für } \nu \nearrow.$$

(Beim ersten und letzten dieser Sätze wurde das Lemma 7 angewandt.) In diesen Sätzen darf o durch O ersetzt werden.

5. Vergleichssätze für Rieszsche Mittel.

5.1. Im folgenden wollen wir mit Hilfe der Sätze des § 4 für die Rieszschen Mittel einige Vergleichssätze beweisen, in denen zwei wichtige Vergleichssätze, das „first theorem of consistency" und das „second theorem of consistency" enthalten sind[18]).

Eine Folge $\{s_\nu\}$ heißt limitierbar durch das Verfahren $R^\varkappa(\lambda)$ der „stetigen" Rieszschen Mittel, wenn gilt[19]):

$$\sigma^\varkappa(\omega) = \frac{1}{\omega^\varkappa} \sum_{\lambda_\nu < \omega} \Delta_\nu (\omega - \lambda_\nu)^\varkappa s_\nu \to s \quad \text{für } \omega \to \infty \qquad (\varkappa > 0), \tag{75}$$

wo

$$0 \leqq \lambda_n \to \infty, \ \Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} < 0 \qquad (n \geqq 0) \tag{76}$$

ist. (Für das größte ν in der Summe (75) ist natürlich

$$\Delta_\nu (\omega - \lambda_\nu)^\varkappa = (\omega - \lambda_\nu)^\varkappa$$

zu schreiben.)

Wenn ω in (75) nur die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ annehmen soll, dann erhalten wir die „unstetigen" Rieszschen Mittel $R_\lambda^\varkappa$. Infolge der Äquivalenz[20]) $R_\lambda^\varkappa \approx R^\varkappa(\lambda)$ für $0 < \varkappa \leqq 1$ dürfen wir uns auf die Untersuchung der unstetigen Mittel $R_\lambda^\varkappa$ beschränken, da wir im folgenden nur Indizes $\varkappa$ mit $0 < \varkappa \leqq 1$ zulassen wollen. Jedes Verfahren $R_\lambda^\varkappa$ ist ein permanentes und normales Matrixverfahren, dessen Elemente links der Diagonale von Null verschieden sind. Für Indizes $\varkappa$ mit $0 < \varkappa \leqq 1$ erfüllt $R_\lambda^\varkappa$ die Bedingungen (M_1) und (M_2) und deshalb auch die Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$.

---

[18]) Vgl. Hardy-Riesz [6].

[19]) Jurkat-Peyerimhoff [11].

[20]) Jurkat [10].

Mit $\Phi(x)$ bezeichnen wir eine für $0 \leqq x < \infty$ erklärte Funktion mit den Eigenschaften

$$0 \leqq \Phi(x) \to +\infty \quad \text{für} \quad x \to \infty \tag{77}$$

und

$$\Phi'(x) > 0, \quad \Phi''(x) \text{ existiert.} \tag{78}$$

Wenn die Folge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung (76) erfüllt, dann erfüllt auch $\mu_n = \Phi(\lambda_n)$ diese Bedingung, wir können also das Verfahren $R^{\varkappa}_{\Phi(\lambda)} = R^{\varkappa}_{\mu}$ bilden. Man kann nun die Frage nach Vergleichssätzen für die Verfahren $R^{\varkappa}_{\lambda}$ und $R^{\varkappa'}_{\Phi(\lambda)}$ aufwerfen. Die Anwendung der Sätze des § 4 auf den Vergleich dieser Verfahren setzt eine Untersuchung des Quotienten je zweier entsprechender Matrixelemente voraus, d. h. wenn wir $R^{\varkappa}_{\lambda} = B$ und $R^{\varkappa'}_{\Phi(\lambda)} = A$ setzen, die Untersuchung von $r_{n\nu} = \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}$. Für $r_{n\nu}$ finden wir hier den Ausdruck

$$r_{n\nu} = \frac{\lambda_{n+1}^{\varkappa}}{\Phi(\lambda_{n+1})^{\varkappa'}} \frac{\Delta_{\nu}(\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_{\nu}))^{\varkappa'}}{\Delta_{\nu}(\lambda_{n+1} - \lambda_{\nu})^{\varkappa}} \qquad (0 \leqq \nu \leqq n). \tag{79}$$

Das „first theorem of consistency" gibt Aufschluß über das Verhalten, wenn $\Phi(x) = x$ gesetzt wird[21]).

Satz 9. *Für* $0 < \varkappa \leqq \varkappa' \leqq 1$ *ist*

$$o(R^{\varkappa}_{\lambda}) \leqq o(R^{\varkappa'}_{\lambda}) \quad [\eta_n]. \tag{80}$$

In (80) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist für $\nu \leqq n$

$$r_{n\nu} = \frac{1}{\lambda_{n+1}^{\varkappa-\varkappa'}} \frac{\varkappa'}{\varkappa} \frac{(\lambda_{n+1} - \tau_{\nu})^{\varkappa'-1}}{(\lambda_{n+1} - \tau_{\nu})^{\varkappa-1}} = \frac{\varkappa'}{\varkappa} \frac{1}{\lambda_{n+1}^{\varkappa-\varkappa'}} (\lambda_{n+1} - \tau_{\nu})^{\varkappa'-\varkappa} \quad (\lambda_{\nu} < \tau_{\nu} < \lambda_{\nu+1}). \tag{81}$$

Daraus folgt, daß $r_{n\nu} \searrow$ für $\nu \nearrow$. Nach Satz 6 (Zusatz) ist dann (80) erfüllt.

Bemerkung. Ist $\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}} = o(1) \quad (n \to \infty)$ und $0 < \varkappa < \varkappa' \leqq 1$, dann gilt

$$r_{nn} = \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^{\varkappa'-\varkappa} = o(1) \qquad (n \to \infty),$$

also nach Lemma 7 schärfer $o(R^{\varkappa}_{\lambda}) < o(R^{\varkappa'}_{\lambda})$ $[\eta_n]$. Ist dagegen

$$\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}} \geqq \varepsilon > 0,$$

dann gilt nach Satz 8 für $0 < \varkappa \leqq \varkappa' \leqq 1$ die Äquivalenz[22])

$$o(R^{\varkappa}_{\lambda}) = o(R^{\varkappa'}_{\lambda}) \quad [\eta_n].$$

[21]) Vgl. Hardy-Riesz [6], th. 16.
[22]) Vgl. Hardy-Riesz [6], th. 36.

5. 2. Beim „second theorem of consistency" wird $x' = x$ gesetzt [23]). Wir suchen zunächst Bedingungen für $\Phi(x)$, welche die Monotonie von r_{nv} nach sich ziehen.

Lemma 8. *Erfüllt die Funktion $\Phi(x)$ die Bedingungen*

$$\Phi''(x) \geqq 0 \ (bzw. \leqq 0) \ für \ x \geqq 0 \tag{82}$$

und

$$\left| \frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)} \right| \searrow \ für \ x \nearrow, \tag{83}$$

dann ist

$$r_{nv} \nearrow \ (bzw. \searrow) \ für \ v \nearrow \qquad (0 \leqq v \leqq n, \ x' = x). \tag{84}$$

Beweis. Es sei $r_{nv}^{*} = \binom{\Phi(\lambda_{n+1})}{\lambda_{n+1}}^{x} r_{nv}$. Die Bedingung (84) ist richtig, wenn wir die entsprechende Monotonie für r_{nv}^{*} bewiesen haben. Aus dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt, daß

$$r_{nv}^{*} = \left(\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\tau_v)}{\lambda_{n+1} - \tau_v} \right)^{x-1} \Phi'(\tau_v) \qquad (\lambda_v < \tau_v < \lambda_{v+1})$$

ist. Die Monotonie $r_{nv}^{*} \nearrow$ (bzw. $\searrow$) für $v \nearrow$ ist sicherlich erfüllt, wenn gilt

$$\left(\frac{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(x)}{\lambda_{n+1} - x} \right)^{x-1} \Phi'(x) \nearrow \ (bzw. \searrow) \ für \ x \nearrow \qquad (0 \leqq x < \lambda_{n+1})$$

oder, wie man durch Bildung der logarithmischen Ableitung dieses Ausdruckes erkennt, wenn gilt

$$(1-x)\left[\frac{\Phi'(x)}{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(x)} - \frac{1}{\lambda_{n+1} - x} \right] + \frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)} \geqq 0 \ (\text{bzw.} \leqq 0) \tag{85}$$

$$(0 \leqq x < \lambda_{n+1}).$$

Hier ist

$$\left[\ldots \right] = \frac{\Phi'(x)(\lambda_{n+1} - x) - [\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(x)]}{(\lambda_{n+1} - x)\,[\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(x)]} \qquad (0 \leqq x < \lambda_{n+1}),$$

und da Zähler und Nenner dieses Quotienten für $x = \lambda_{n+1}$ verschwinden, folgt durch erneute Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die Darstellung

$$\left[\ldots \right] = \frac{-\Phi'(\xi) + \Phi''(\xi)\,(\lambda_{n+1} - \xi) + \Phi'(\xi)}{-[\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\xi)] - \Phi'(\xi)\,(\lambda_{n+1} - \xi)} \qquad (0 \leqq x < \xi < \lambda_{n+1}).$$

Trägt man dies in (85) ein, dann kann man die Fälle $\geqq 0$ und $\leqq 0$ unter Beachtung von (82) zusammenfassen zu

$$\frac{|\Phi''(x)|}{\Phi'(x)} \geqq (1-x)\,\frac{|\Phi''(\xi)|\,(\lambda_{n+1} - \xi)}{[\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\xi)] + \Phi'(\xi)\,(\lambda_{n+1} - \xi)} \qquad (0 \leqq x < \xi < \lambda_{n+1}).$$

Diese Ungleichung ist sicher richtig, da sogar gilt

$$\left| \frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)} \right| \geqq \left| \frac{\Phi''(\xi)}{\Phi'(\xi)} \right| \qquad (0 \leqq x < \xi < \lambda_{n+1}),$$

und damit ist Lemma 8 bewiesen.

[23]) Vgl. Hardy-Riesz [6], th. 17 und 19, Hardy [3], Hirst [9], Kuttner [12].

Aus dem Lemma 8 erhalten wir die folgenden beiden Vergleichssätze.

Satz 10. *Gilt*

$$\Phi''(x) \leqq 0 \qquad (x \geqq x_0) \tag{86}$$

und

$$\left|\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}\right| \searrow \text{ für } x \nearrow \qquad (x \geqq x_0), \tag{87}$$

dann ist für $0 < \varkappa \leqq 1$

$$o(R_\lambda^\varkappa) \leqq o(R_{\Phi(\lambda)}^\varkappa) \quad [\eta_n]. \tag{88}$$

In (88) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 6 (Zusatz), denn aus (86) und (87) folgt nach Lemma 8, daß $r_{n\nu}$ mit wachsendem ν (für $\nu \geqq \nu_0$) monoton fällt; ferner besitzen $r_{n\nu}$ und $r_{n,\nu+1}$ für $n \to \infty$ und $\nu \leqq \nu_0$ dieselbe Größenordnung.

Satz 11. *Gilt*

$$\Phi''(x) \geqq 0 \qquad (x \geqq x_0), \tag{89}$$

$$\left|\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}\right| \searrow \text{ für } x \nearrow \qquad (x \geqq x_0) \tag{90}$$

und

$$x\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = O(1), \tag{91}$$

dann ist für $0 < \varkappa \leqq 1$

$$o(R_\lambda^\varkappa) = o(R_{\Phi(\lambda)}^\varkappa) \quad [\eta_n]. \tag{92}$$

In (92) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 8 mit den Bedingungen unter 2^0 ($n_0 = 0$). Aus (89) und (90) folgt nach Lemma 8, daß die Bedingung (73) erfüllt ist. Da $r_{n\nu}$ und $r_{n\,\nu+1}$ für $n \to \infty$ und $\nu \leqq \nu_0$ dieselbe Größenordnung besitzen, ist auch (72) erfüllt. Aus (91) folgt wegen (89) die Beziehung $|r_{nn}| \leqq K$; deshalb ist auch (71) erfüllt, q. e. d.

Zum Schluß wollen wir die Sätze 10 und 11 auf den Fall anwenden, daß $\Phi(x)$ eine „logarithmisch-exponentielle" Funktion, kurz L-Funktion im Sinne von Hardy[24]) ist.

Satz 12. (Hardy).

Ist $\Phi(x)$ *eine L-Funktion, welche die Bedingungen*

$$\Phi(x) \to +\infty \text{ für } x \to \infty \tag{93}$$

und

$$\Phi(x) = O(x^\Delta) \qquad \text{für genügend großes } \Delta \tag{94}$$

[24]) Hardy [4], S. 17.

erfüllt, dann ist

$$o(R_\lambda^x) \leqq o(R_{\Phi(\lambda)}^x) \quad [\eta_n]. \tag{95}$$

In (95) *darf o durch O ersetzt werden*[25]).

Bemerkung. Aus Satz 12 folgen unmittelbar die bekannten Vergleichssätze[26])

$$o(R_\lambda^x) \geqq o(R_{e^\lambda}^x) \quad [\eta_n],$$
$$o(R_{\lambda^\alpha}^x) = o(R_{\lambda^\beta}^x) \quad [\eta_n] \qquad (\alpha, \beta > 0).$$

In beiden Fällen darf o durch O ersetzt werden.

6. Vergleichssätze für Nörlund-Verfahren und bewichtete arithmetische Mittel.

Ein Nörlund-Verfahren $N(p_n)$ ordnet jeder Folge $\{s_\nu\}$ eine neue Folge $\{\sigma_n\}$ zu durch die Vorschrift

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu} s_\nu \qquad (P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu,\ p_\nu > 0). \tag{96}$$

Ein bewichtetes arithmetisches Mittel $M(p_n)$ ordnet jeder Folge $\{s_\nu\}$ eine neue Folge $\{\sigma_n\}$ zu durch die Vorschrift

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \qquad (P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu,\ p_\nu > 0). \tag{97}$$

Bei den Verfahren $N(p_n)$ und $M(p_n)$ sind alle Glieder links der Hauptdiagonale von Null verschieden. Ferner erfüllt jedes derartige Verfahren $M(p_n)$ die Bedingungen (M_1) und (M_2), also auch die Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$. Die Verfahren $N(p_n)$ dagegen erfüllen (M_1) und (M_2) nicht ohne Einschränkung über $\{p_n\}$, auf jeden Fall aber dann, wenn p_n die Bedingung

$$0 < p_n \searrow,\ \frac{p_{n+1}}{p_n} \nearrow \text{ für } n \nearrow \tag{18}$$

erfüllt.

Die folgenden Sätze 13 und 14 beziehen sich auf den Vergleich verschiedener Nörlund-Verfahren, die Sätze 15 und 16 behandeln bewichtete arithmetische Mittel.

---

[25]) Dieser Satz folgt in einfacher Weise aus den Sätzen 11 und 12, wenn man die Eigenschaften der L-Funktionen berücksichtigt. Die Ableitungen von L-Funktionen sind wieder L-Funktionen, deshalb sind die Bedingungen (86) bzw. (89) erfüllt. Die Beziehung (87) bzw. (90) wird dadurch bewiesen, daß die Annahme $\left|\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}\right| \geqq \varepsilon > 0$ auf einen Widerspruch zu (93) oder (94) führt. Aus der Annahme, daß für große x die Beziehung $x\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \geqq K\ (K > \Delta)$ gilt, folgt ein Widerspruch zur Voraussetzung (94), deshalb ist auch (91) erfüllt, q. e. d.

[26]) Hardy-Riesz [6], th. 17.

Satz 13. *Die Verfahren $N(p_n)$ und $N(q_n)$ seien permanent und $\{p_n\}$ erfülle die Bedingung* (18). *Dann folgt aus*[27])

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{q_n}{p_n}, \quad \frac{q_n}{p_n} \text{ monoton für } n \geqq n_0 \tag{98}$$

die Beziehung

$$o(N(p_n)) \leqq o(N(q_n)) \quad [\eta_n]. \tag{99}$$

In (99) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Satz 5 (Zusatz) und Satz 6 (Zusatz)[28]).

Zusatz. Aus Lemma 7 folgt, daß (99) verschärft werden kann zu $o(N(p_n)) < o(N(q_n))$ $[\eta_n]$, wenn die Bedingung (98) durch $\frac{q_n}{p_n} \nearrow \infty$ ersetzt wird.

Satz 14. *Die Verfahren $N(p_n)$ und $N(q_n)$ seien permanent und $\{p_n\}$ und $\{q_n\}$ erfüllen* (18). *Dann folgt aus*

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{q_n}{p_n} \leqq K, \quad \frac{q_n}{p_n} \text{ monoton für } n \geqq n_0 \tag{100}$$

die Beziehung

$$o(N(p_n)) = o(N(q_n)) \quad [\eta_n]. \tag{101}$$

In (101) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Satz 7[28]).

Satz 15. *Die Verfahren $M(p_n)$ und $M(q_n)$ seien permanent. Dann folgt aus*[29])

$$\frac{q_n}{p_n} \searrow \text{ für } n \nearrow \qquad (n \geqq n_0) \tag{102}$$

die Beziehung

$$o(M(p_n)) \leqq o(M(q_n)) \quad [\eta_n]. \tag{103}$$

In (103) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Satz 6 (Zusatz).

Zusatz. Aus Lemma 7 folgt, daß (103) verschärft werden kann zu $o(M(p_n)) < o(M(q_n))$ $[\eta_n]$, wenn außer (102) auch noch $\frac{q_n}{p_n} = o\left(\frac{Q_n}{P_n}\right)$ ist.

---

[27]) Hardy [5], th. 23.

[28]) Beim Beweis ist zu beachten, daß $\frac{q_n}{p_n}$ monoton ist, also konvergent oder bestimmt divergent. Wegen $\frac{Q_n}{P_n} = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \frac{q_\nu}{p_\nu}$ ist auch $\frac{Q_n}{P_n}$ konvergent oder bestimmt divergent (mit demselben Grenzwert).

[29]) Hardy [5], th. 14, Garabedian-Randels [2].

Satz 16. *Die Verfahren $M(p_n)$ und $M(q_n)$ seien permanent. Dann folgt aus*

(104) $$\frac{q_n}{p_n} \nearrow \text{ für } n \nearrow \qquad (n \geqq n_0)$$

und

(105) $$\frac{q_n}{p_n} = O\left(\frac{Q_n}{P_n}\right)$$

die Beziehung

(106) $$o(M(p_n)) = o(M(q_n)) \quad [\eta_n].$$

In (106) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Satz 8.

Zusatz. Die Bedingung (105) ist z. B. erfüllt, wenn $\frac{q_n}{p_n} \leqq K$ ist. Dann konvergieren nämlich $\frac{q_n}{p_n}$ und $\frac{Q_n}{P_n}$ [28]).

Bemerkung. Für $p_n = 1$ erhält man aus den Sätzen 13 und 15 folgende Vergleichssätze für das Cesàrosche Verfahren C_1:

$o(N(q_n)) \geqq o(C_1)\,[\eta_n]$, wenn q_n monoton und $q_n \geqq \varepsilon > 0$ [30]).

$o(N(q_n)) \leqq o(C_1)\,[\eta_n]$, wenn q_n monoton und beschränkt ist und (18) erfüllt.

$o(N(q_n)) > o(C_1)\,[\eta_n]$, wenn $q_n \nearrow +\infty$.

$o(M(q_n)) \geqq o(C_1)\,[\eta_n]$ (bzw. $\leqq$), wenn $q_n \searrow$ (bzw. $\nearrow$).

Auf Grund der Sätze 13 und 15 und der Bemerkung über das C_1-Verfahren können wir die Stärkeverhältnisse bei den Verfahren $M(p_n)$ und $N(q_n)$ ganz grob folgendermaßen beschreiben:

1°. $N(p_n)$ ist um so stärker, je stärker p_n wächst; das C_1-Verfahren „trennt" die Verfahren mit fallendem und wachsendem p_n.

2°. $M(p_n)$ ist um so stärker, je stärker p_n fällt. Das C_1-Verfahren „trennt" die Verfahren mit wachsendem und fallendem p_n.

Man gewinnt so den Eindruck, daß zwei Verfahren $M(p_n)$ und $N(p_n)$ nicht äquivalent sein können, es sei denn, daß sie mit C_1 äquivalent sind. Genaueres folgt aus

Satz 17. *$N(p_n)$ und $M(p_n)$ seien permanent, und es sei p_n monoton. Dann gibt es folgende Möglichkeiten*

1°. $M(p_n) \approx C_1 \approx N(p_n)$;

2°. $M(p_n) \leqq C_1 < N(p_n)$;

3°. $M(p_n) \geqq C_1$ *und nicht* $N(p_n) \geqq C_1$.

Gleichbedeutend mit 3° ist:
Es ist entweder $M(p_n) \geqq C_1 > N(p_n)$ [31]),
oder $M(p_n) \geqq C_1$ und C_1 mit $N(p_n)$ nicht vergleichbar.

---

[30]) Hardy [5], th. 20.

[31]) Dies ist stets richtig, wenn p_n die Bedingung (18) erfüllt.

Beweis. Wir haben folgende Fälle zu unterscheiden:

$$0 < \varepsilon \leqq p_n \leqq K, \quad p_n \to \infty, \quad p_n \to 0.$$

Die Behauptung folgt aus der Bemerkung über den Vergleich mit dem C_1-Verfahren (und Anwendung von Satz 16 und Lemma 7).

Vergleichsrelationen zwischen $N(p_n)$ und $M(p_n)$ ziehen i. a. eine Relation zwischen diesen Verfahren und C_1 nach sich. Im einzelnen gilt nach Satz 17:

Zusatz. $N(p_n)$ und $M(p_n)$ seien permanent, und es sei p_n monoton.

Aus $M(p_n) \approx N(p_n)$ folgt $M(p_n) \approx C_1 \approx N(p_n)$[32];
aus $M(p_n) < N(p_n)$ folgt $M(p_n) \leqq C_1 < N(p_n)$;
aus $M(p_n) > N(p_n)$ folgt $M(p_n) \geqq C_1$ und nicht $N(p_n) \geqq C_1$.

7. Der Äquivalenzsatz von M. Riesz.

Die Cesàroschen Verfahren $C_\varkappa$ und die unstetigen Rieszschen Mittel $R_n^\varkappa$ können als Nörlund-Verfahren durch die Folgen $p_n = \binom{n+\varkappa-1}{n}$ und $q_n = (n+1)^\varkappa - n^\varkappa$ definiert werden. Beide Folgen erfüllen für $0 < \varkappa \leqq 1$ die Bedingung (18). (In diesem Paragraphen verstehen wir immer unter p_n und q_n die oben angeführten Ausdrücke.) Als Anwendung des Satzes 14 beweisen wir die Äquivalenz dieser beiden Verfahren.

Lemma 9. *Für $n \geqq n_0$ und $0 < \varkappa \leqq 1$ ist*

$$\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{n}\right) \frac{n^\varkappa - (n-1)^\varkappa}{(n+1)^\varkappa - n^\varkappa} \leqq 1. \tag{107}$$

Beweis. Schreibt man (107) in der Form

$$\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{n}\right)\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\varkappa\right) \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\varkappa - 1$$

und entwickelt $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\varkappa$ und $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\varkappa$ bis auf $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, dann erkennt man nach kurzer Rechnung die Richtigkeit der Behauptung.

Satz 18. *Für $0 < \varkappa \leqq 1$ ist*

$$o(C_\varkappa) = o(R_n^\varkappa) \quad [\eta_n]. \tag{108}$$

In (108) *darf o durch O ersetzt werden.*

Beweis. Wir zeigen, daß die Voraussetzungen (100) des Satzes 14 erfüllt sind. Der Quotient $\frac{p_n}{q_n}$ liegt zwischen zwei positiven Schranken, da p_n und q_n dieselbe Größenordnung besitzen. Die Monotonie dieses Quotienten folgt aus (107), da

$$\frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \frac{p_n}{q_n} = \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{n}\right) \frac{n^\varkappa - (n-1)^\varkappa}{(n+1)^\varkappa - n^\varkappa}$$

ist, q. e. d.

[32]) Hierin ist ein Ergebnis der Herren Hayashi und Izumi [7] enthalten; sie hatten etwas kompliziertere Bedingungen gefunden.

Aus der Äquivalenz der Rieszschen Mittel $R_\lambda^\varkappa$ und $R^\varkappa(\lambda)$ (Jurkat [10], § 2) folgt dann für $0 < \varkappa \leqq 1$ der Äquivalenzsatz $R^\varkappa(n) \approx C_\varkappa$ von M. Riesz [33]).

Schlußbemerkungen.

Ein Blick auf die Beweise der Vergleichssätze des § 4 lehrt, daß die $O \to o$-Schlüsse des § 2 — vom Mittelwertsatz selbst abgesehen — das entscheidende Hilfsmittel bei der Aufstellung dieser Vergleichssätze darstellen. Man kann nun die Frage aufwerfen, ob diese $O \to o$-Sätze allgemeiner formuliert und unter geringeren Voraussetzungen bewiesen werden können. Dies ist in der Tat möglich. Wir haben die Sätze hier nur in der einfachsten Form ausgesprochen, z. B. wurde die in § 2 auftretende Matrix B stets als normal vorausgesetzt. Diese Voraussetzung können wir zunächst dahingehend abändern, daß B eine eineindeutige Abbildung auf den Raum der konvergenten Folgen vermitteln soll. Die Beweise lassen sich dann mit verhältnismäßig einfachen funktionalanalytischen Hilfsmitteln durchführen. Unter Verwendung der Sätze über F-Räume im Sinne von Banach [1] können wir aber auch diese Voraussetzungen fallen lassen. Auf diese Verallgemeinerungen werden wir in einer späteren Arbeit zurückkommen.

[33]) Riesz [15].

Literatur.

Banach, S.

[1] Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932.

Garabedian, H. L. — Randels, W. C.

[2] Theorems on Riesz means, Duke Math. J., **4** (1938), 529—533.

Hardy, G. H.

[3] The second theorem of consistency for summable series, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **15** (1916), 72—88.

[4] Orders of infinity, Cambridge 1924.

[5] Divergent series, Oxford 1949.

Hardy, G. H. — Riesz, M.

[6] The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915.

Hayashi, G. — Izumi, S.

[7] Theorems on Nörlund's method of summation, II, Tôhoku Math. J., **47** (1940), 69—73.

Hill, J. D.

[8] On perfect methods of summability, Duke Math. J., **3** (1937), 702—714.

Hirst, K.

[9] On the second theorem of consistency in the theory of summation by typical means, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **33** (1932), 353—366.

Jurkat, W.

[10] Über Rieszsche Mittel mit unstetigem Parameter, Math. Zeitschr., **55** (1952), 8–12.

Jurkat, W. — Peyerimhoff, A.

[11] Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen, Math. Zeitschr., **55** (1952), 92—108.

Kuttner, B.

[12] Note on the „second theorem of consistency“ for Riesz summability, J. Lond. Math. Soc., **26** (1951), 104—111.

Mazur, S.

[13] Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitz'schen Limitierungsverfahren, Stud. Math., **2** (1930), 40—50.

Peyerimhoff, A.

[14] Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren, Math. Zeitschr., **55** (1952), 23—54.

Riesz, M.

[15] Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, Compt. rend., **152** (1911), 1651—1654.

Zeller, K.

[16] Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr., **53** (1951), 463—487.

[17] Abschnittskonvergenz in FK-Räumen, Math. Zeitschr., **55** (1952), 55—70.

(Eingegangen am 12. Dezember 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 179—205 (1952).

Das Taylorsche Verfahren zur Limitierung von Funktionen.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

W. Meyer-König in Stuttgart.

§ 1.

Einleitung.

In dieser Note wird ein Verfahren zur Limitierung von Funktionen definiert und untersucht, das dem Taylorschen Verfahren zur Limitierung von Folgen analog ist[1]).

Im einfachsten Fall handelt es sich bei diesem letzteren Verfahren, bezeichnet als T_α-Verfahren (α die Ordnung des Verfahrens, $0 < \alpha < 1$), um eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

mit komplexen Gliedern und mit den Teilsummen

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

wobei das Funktionselement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3}$$

der komplexen Veränderlichen z für $|z| < 1$ als konvergent vorausgesetzt ist. Konvergiert dann die gewiß für $|z - \alpha| < 1 - \alpha$ konvergente Taylor-Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - \alpha)^n \tag{4}$$

---

[1]) Die wichtigsten Begriffe und Bezeichnungen der Limitierungstheorie werden im folgenden als bekannt vorausgesetzt. Wegen des genannten Taylorschen Verfahrens vergleiche man die in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeiten [9], [11] des Verf. und die dort angegebene Literatur (G. H. Hardy und J. E. Littlewood, P. Vermes, R. Wais), ferner V. F. Cowling [1], J. Teghem [12], [13], P. Vermes [14], [15]. (Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schriftenverzeichnis am Schluß der Arbeit.) — Über einen Teil der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit hat Verf. auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Erlangen (Herbst 1950) vorgetragen (vgl. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **55**, Kursivseite 40 (1952)).

von $f(z)$ nach Potenzen von $z-\alpha$ an der Stelle $z=1$ zum Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(1-\alpha)^n = s, \tag{5}$$

so heißt die Reihe (1) T_α-summierbar (bzw. die Folge (2) T_α-limitierbar) zum Wert s und setzt man

$$T_\alpha\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = T_\alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s. \tag{6}$$

Die Teilsummen

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu(1-\alpha)^\nu$$

der Reihe (5) lassen sich, wie unschwer zu zeigen ist, in der Form

$$t_n = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n} s_\nu$$

darstellen. Damit erkennt man, daß das T_α-Verfahren ein Matrixverfahren ist. Die bekannten hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Permanenz eines solchen sind im vorliegenden Fall erfüllt. Aus der Konvergenz von (1) zum Wert s folgt also (6). Dies kann man auch so aussprechen: Ist (3) für $z=1$ zum Wert s konvergent, so gilt dasselbe für (4). Also gilt auch der (später benötigte)

Satz 1.1 (Konvergenz einer Taylor-Entwicklung, Fall 1). *Das Funktionselement*

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

sei an der Stelle $z=z_1\ (\neq z_0)$ konvergent zum Wert s. Dann ist für jeden festen Wert $\alpha\ (0<\alpha<1)$ die Taylor-Entwicklung von $h(z)$ nach Potenzen von $z-z_0'$, wobei $z_0' = z_0 + \alpha(z_1 - z_0)$ gesetzt ist, an der Stelle $z=z_1$ ebenfalls konvergent zum Wert s.

Nun handle es sich statt der Reihe (1) um das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} a(x)\,dx \tag{7}$$

mit dem zugehörigen Teilintegral

$$s(x) = \int_0^{x} a(t)\,dt \qquad (x>0). \tag{8}$$

Dabei sei $a(x)$ eine für $x>0$ definierte komplexwertige und in jedem Intervall $0 \leqq x \leqq x_0\ (x_0>0)$ etwa eigentlich im Riemannschen Sinn integrierbare Funktion. Um analog dem T_α-Verfahren das Integral (7) zu summieren bezw. die Funktion (8) zu limitieren, ziehen wir statt

(3) das Laplace-Integral

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, a(t)\, dt \tag{9}$$

heran, dessen Konvergenz für $\Re z > 0$ [2]) vorausgesetzt sei. Wir wählen eine Zahl $a > 0$, die Ordnung des zu definierenden Verfahrens, das als Taylorsches Verfahren zur Limitierung von Funktionen, kurz als T'_a-Verfahren bezeichnet werden soll. Gewiß ist die Taylor-Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} b'_n (z-a)^n \tag{10}$$

von $F(z)$ nach Potenzen von $z - a$ für $|z - a| < a$ konvergent. Ist sie auch an der Stelle $z = 0$ konvergent, und zwar zum Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} b'_n (-a)^n = s, \tag{11}$$

so nennen wir das Integral (7) T'_a-summierbar (bezw. die Funktion (8) T'_a-limitierbar) zum Wert s, und setzen

$$^{(T'_a)}\int_0^\infty a(x)\, dx = T'_a\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s. \tag{12}$$

Die Teilsummen

$$t'_n = \sum_{\nu=0}^{n} b'_\nu (-a)^\nu$$

der Reihe (11) lassen sich (vgl. § 2, Schluß) in der Form

$$t'_n = \frac{a^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-at} s(t)\, dt \tag{13}$$

darstellen. Die Folge t'_n ist somit die zu dem Kern

$$\frac{a^{n+1}}{n!}\, t^n e^{-at} \qquad (n = 0, 1, \ldots;\ t > 0) \tag{14}$$

gehörige Integraltransformation der Funktion $s(x)$. Die bekannten hinreichenden Bedingungen für die Permanenz einer solchen sind im vorliegenden Fall erfüllt [3]). Aus der Konvergenz von (7) zum Wert s folgt also (12). Man kann dies auch so aussprechen: Ist (9) für $z = 0$ zum Wert s konvergent, so gilt dasselbe für (10).

So wie man beim T_a-Verfahren die oben gemachte Voraussetzung, daß (3) für $|z| < 1$ konvergieren soll, durch weniger einschränkende Bedingungen ersetzt, werden wir auch beim T'_a-Verfahren die Voraussetzung, daß (9) für $\Re z > 0$ konvergieren soll, abschwächen. Verschiedene Wege sind möglich. In § 2 wird das Verfahren in einer

[2]) $\Re$ soll Realteil, $\Im$ soll Imaginärteil bedeuten.

[3]) Die Permanenzeigenschaft der Transformation (13) wurde vom Verf. schon früher (vgl. [9], S. 283) nutzbar gemacht.

den Zwecken des § 3 angepaßten Weise aufgebaut. Dabei gehen wir nicht von einem zu summierenden Integral, sondern von einer zu limitierenden Funktion aus. Der Zusammenhang des Verfahrens mit der Transformation (13) bleibt dabei erhalten.

In § 3 wird der zu einem T'_a-Verfahren vorgegebener Ordnung gehörige Summierbarkeitsbereich eines Laplace-Integrales untersucht. Dieser läßt sich genau angeben, wenn die singulären Stellen bekannt sind, auf die man bei analytischer Fortsetzung der dargestellten Funktion längs horizontaler Geraden stößt. Der T'_a-Wert des Integrales stimmt im Summierbarkeitsbereich mit dem durch die Fortsetzung erzielten Wert überein.

Bei der weiteren Untersuchung des Verfahrens knüpft man am besten an die Transformation (13) an, die zu der Matrix (14) mit nicht kontinuierlichem Zeilenindex n und kontinuierlichem Spaltenindex t gehört. In § 4 werden zunächst Produktbeziehungen zwischen der Matrix (14) und den Matrizen einiger geläufiger weiterer Limitierungsverfahren aufgestellt. In § 5 wird die Definition des T'_a-Verfahrens nochmals erweitert, so wie es durch den Zusammenhang mit der Matrix (14) nahegelegt ist. Ferner wird geprüft, wie sich eine Argumentverschiebung bei der Funktion $s(x)$ auf ihre T'_a-Limitierbarkeit auswirkt. Diese Frage ist auch deshalb von Interesse, weil ihre Beantwortung auf ein konvergenzgleiches Limitierungsverfahren führt. § 6 bringt Vergleichs- und Verträglichkeitssätze. Es ergibt sich, daß die T'_a-Verfahren unter sich, mit dem Abelschen und mit dem Cesàroschen Verfahren verträglich, ferner daß alle T'_a-Verfahren für beschränkte Funktionen miteinander äquivalent sind.

Weitere Eigenschaften des T'_a-Verfahrens sollen in einer späteren Arbeit untersucht werden.

Die im folgenden auftretenden Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ und $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ sind im eigentlichen Riemannschen bezw. Riemann-Stieltjesschen Sinn aufzufassen. Uneigentliche Integrale der Form $\int_a^\infty$ sind im Cauchyschen Sinn zu verstehen: $\int_a^\infty = \lim_{x\to\infty} \int_a^x$. Wegen der benützten Tatsachen über Stieltjes-Integrale und Laplace-Integrale vergleiche man G. Doetsch [2], D. V. Widder [16].

§ 2.

Definition und Permanenz des T'_a-Verfahrens.

In § 1 wurde das T'_a-Verfahren in vorläufiger Weise so definiert, wie es in Analogie zum T_a-Verfahren natürlich ist. In § 2 wird das T'_a-Verfahren neu und allgemeiner in einer für die Anwendung auf Laplace-Stieltjes-Integrale zweckmäßigen Form aufgebaut. Daß die

Definition des § 2 mit derjenigen des § 1 übereinstimmt, sofern es sich wie in § 1 um die Summierung des Integrales § 1, (7) bzw. um die Limitierung der Funktion § 1, (8) unter der Voraussetzung der Konvergenz des Integrales § 1, (9) für $\Re z > 0$ handelt, wird am Schluß von § 2 gezeigt.

Definition 2.1 (Funktionsklasse $\mathfrak{V}$). *Die komplexwertige Funktion $s(x)$ der reellen Veränderlichen x heißt zur Klasse $\mathfrak{V}$ gehörig, wenn sie für $x \geqq 0$ definiert und für jedes $x_0 > 0$ im Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ von beschränkter Schwankung ist.*

Hilfssatz 2.2 (Konvergenz zu $s(x) \in \mathfrak{V}$ gehöriger Integrale). *Ist a eine reelle positive Zahl und $s(x) \in \mathfrak{V}$, so sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(A_1) *Für jedes $n = 0, 1, \ldots$ konvergiert das Integral*

$$\int_0^\infty t^n e^{-at}\, d\, s(t). \tag{1}$$

(A_2) *Für jedes $n = 0, 1, \ldots$ gilt*

$$s(x) = O(x^{-n} e^{ax}) \qquad (x \to \infty). \tag{2}$$

Beweis. (A_1) sei erfüllt. Aus der Konvergenz von (1) für $n = 0$ folgt $s(x) = o(e^{ax})$ für $x \to \infty$, so daß (2) für $n = 0$ erfüllt ist. Die Behauptung ergibt sich nun durch vollständige Induktion nach n. (2) sei schon bewiesen für die Nummer $n \geqq 0$. Die Funktion

$$\beta(x) = \int_0^x t^{n+1}\, d\, s(t) = x^{n+1} s(x) - (n+1) \int_0^x t^n s(t)\, dt \tag{3}$$

gehört zu $\mathfrak{V}$. Wegen (A_1) existiert

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x t^{n+1} e^{-at}\, d\, s(t) = \lim_{x \to \infty} \int_0^x e^{-at}\, d\, \beta(t) = \int_0^\infty e^{-at}\, d\, \beta(t),$$

woraus $\beta(x) = o(e^{ax})$ für $x \to \infty$ folgt. Aus (3) und der Induktionsvoraussetzung ergibt sich damit

$$x^{n+1} e^{-ax} s(x) = e^{-ax} \beta(x) + (n+1) e^{-ax} \int_0^x O_{t \to \infty}(e^{at})\, dt = O_{x \to \infty}(1).$$

Nun sei (A_2) erfüllt. Für jede feste Nummer $n \geqq 1$ ist

$$e^{-ax} s(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right) \qquad (x \to \infty),$$

existiert also das Integral (1) als

$$\lim_{x \to \infty} \left\{ t^n e^{-at} s(t) \Big|_0^x - n \int_0^x t^{n-1} e^{-at} s(t)\, dt + a \int_0^x t^n e^{-at} s(t)\, dt \right\}$$

$$= -n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-at} s(t)\, dt + a \int_0^\infty t^n e^{-at} s(t)\, dt.$$

Im Falle $n = 0$ schließt man analog. —

Wir wählen nun eine im folgenden festgehaltene Zahl $a > 0$. Es soll dann das T_a'-Verfahren, das Taylorsche Verfahren der Ordnung a zur Limitierung von Funktionen der Klasse $\mathfrak{B}$, definiert werden. Eine Funktion $s(x) \in \mathfrak{B}$ sei gegeben. Ihr wird das Laplace-Integral

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, d\, s(t) \quad \text{(Konvergenzabszisse } \sigma) \tag{4}$$

zugeordnet. Es wird vorausgesetzt, daß $s(x)$ die Bedingung (A_1) erfüllt, so daß $\sigma \leqq a$ und auf jeden Fall $F(z)$ regulär für $\Re z > a$ ist. Weiter wird vorausgesetzt, daß $F(z)$ an der Stelle $z = a$ regulär ist[4]). Für $z = 0$ folgt aus (4) formal

$$s(\infty) = F(0) + s(0). \tag{5}$$

Es ist daher natürlich, der Funktion $s(x)$ die rechte Seite von (5) als verallgemeinerten Grenzwert zuzuordnen, wobei $F(0)$ noch in „vernünftiger" Weise festzusetzen ist. Naheliegend ist es, unter $F(0)$ den Wert der Taylor-Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(a)\,(z-a)^n \tag{6}$$

von $F(z)$ nach Potenzen von $z - a$ für $z = 0$ zu verstehen, falls diese Entwicklung für $z = 0$ konvergiert. Nun ist für $\Re z > a$

$$F^{(n)}(z) = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-zt}\, d\, s(t) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-zt}\, d\, \mu(t)$$

mit

$$\mu(x) = \int_0^x t^n\, d\, s(t) \qquad (x \geqq 0).$$

Der Grenzübergang $z \to a + 0$ liefert auf Grund eines bekannten Abelschen Satzes

$$F^{(n)}(a) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-at}\, d\, \mu(t),$$

falls das rechts stehende Integral konvergiert. Ohne den Faktor $(-1)^n$ ist dieses aber gleich dem nach Voraussetzung konvergenten Integral (1). Für $z = 0$ geht daher (6) über in

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-at}\, d\, s(t). \tag{7}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann das T_a'-Verfahren definiert werden.

Definition 2.3 (Verfahren T_a'). *Ist $a > 0$, so heißt T_a' auf die Funktion $s(x)$ anwendbar, wenn $s(x) \in \mathfrak{B}$, (A_1) bezw. (A_2) erfüllt und (4) an der Stelle $z = a$ regulär ist. Die Funktion $s(x)$ heißt durch*

[4]) Im Falle $\sigma < a$ ist diese Voraussetzung von selbst erfüllt.

T_a' zum Wert s limitierbar, wenn T_a' auf $s(x)$ anwendbar und (7) konvergent zur Summe $s - s(0)$ ist.

T_a' ist auf $s(x) \in \mathfrak{B}$ sicher dann anwendbar, wenn $\sigma < a$ ist. Umgekehrt folgt aus der Anwendbarkeit von T_a' auf $s(x)$, daß $\sigma \leqq a$ ist. Ist T_a' in Anwendung auf $s(x)$ wirksam, d. h. ist $T_a'\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} s(x)$ vorhanden, so ist

$$T_a'\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-at}\, d\,s(t)\,^{5}).$$

Das nächste Ziel ist der Nachweis der Permanenz des T_a'-Verfahrens. Dazu werden die Teilsummen der Reihe (7) umgeformt.

Satz 2. 4 (Integraltransformation T_a'). *T_a' sei auf $s(x)$ anwendbar, und es werde*

$$t_n = s(0) + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a^\nu}{\nu!} \int_0^{\infty} t^\nu e^{-at}\, d\,s(t) \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$T_a' s = T_a'(n;\, s(x)) = \frac{a^{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-at}\, s(t)\, d\,t \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

gesetzt[6]*). Dann ist $t_n = T_a' s$ $(n = 0, 1, \ldots)$.*

Beweis. Benützt man die Hilfsformel

$$\int_{x=t}^{\infty} x^n e^{-ax}\, d\,x = \frac{n!\, e^{-at}}{a^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}\, a^\nu t^\nu \qquad (t \geqq 0), \tag{8}$$

die man z. B. durch wiederholte partielle Integration bestätigt, so wird

$$t_n = s(0) + \int_0^{\infty} e^{-at} \left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a^\nu t^\nu}{\nu!} \right) d\,s(t)$$

$$= s(0) + \frac{a^{n+1}}{n!} \lim_{T\to\infty} \int_{t=0}^{T} \left(\int_{x=t}^{\infty} x^n e^{-ax}\, d\,x \right) d\,s(t)$$

$$= s(0) + \frac{a^{n+1}}{n!} \lim_{T\to\infty} \left[s(t) \int_{x=t}^{\infty} x^n e^{-ax}\, d\,x \right]_{t=0}^{T} + \frac{a^{n+1}}{n!} \lim_{T\to\infty} \int_{t=0}^{T} t^n e^{-at} s(t)\, d\,t.$$

---

[5]) Rein formal kann man diese Beziehung auf folgende Weise erhalten:

$$T_a'\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s(\infty) = s(0) + \int_0^{\infty} d\,s(t)$$

$$= s(0) + \int_0^{\infty} e^{-at} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!} \right) d\,s(t) = s(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-at} t^n\, d\,s(t).$$

[6]) Da $s(x)$ den Bedingungen (A_1) und (A_2) genügt, existieren die angeschriebenen Ausdrücke.

Die zuletzt für t_n durch eine partielle Integration gewonnene Darstellung ist berechtigt, weil die Grenzwerte im zweiten und dritten Summanden existieren. Der zweite Summand ist — man beachte (8) und (A_2) — gleich

$$-s(0)+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{a^\nu}{\nu!}\left[\lim_{T\to\infty} T^\nu e^{-aT}s(T)\right]=-s(0).\ —$$

Wegen 2. 4 sind, falls T_a' auf $s(x)$ anwendbar ist, die Aussagen

$$T_a'\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x)=s \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} T_a'(n;\, s(x))=s$$

äquivalent. Das T_a'-Verfahren ist also im Bereich der Funktionen $s(x)$, auf die es anwendbar ist, das zu der Integraltransformation T_a', d. h. der Transformation

$$T_a'(n;\, s(x))=\int_0^\infty a(n,t)\,s(t)\,dt \tag{9}$$

mit

$$a(n,t)=\frac{a^{n+1}}{n!}\,t^n e^{-at} \qquad (n=0,1,\ldots;\ t>0)$$

gehörige Limitierungsverfahren. Dies öffnet den Zugang zu einer Reihe von Eigenschaften des Verfahrens. In anderen Fällen ist allerdings auch seine ursprüngliche funktionentheoretische Seite nützlich.

Satz 2. 5 (Permanenz von T_a'). *Aus* $s(x)\in\mathfrak{V}$ *und* $\lim_{x\to\infty} s(x)=s$ *folgt* $T_a'\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x)=s$.

Beweis. Aus der Konvergenz von (4) für $z=0$ folgt, daß die Konvergenzabszisse σ von (4) nicht positiv ist. Also ist T_a' auf $s(x)$ anwendbar. Die Behauptung ist daher richtig, wenn die Transformation (9) permanent ist. Dafür sind aber bekannte, unmittelbar zu verifizierende Bedingungen hinreichend. —

Satz 2. 5 läßt sich auch so formulieren: Aus $s(x)\in\mathfrak{V}$ und der Konvergenz des Integrales (4) für $z=0$ zum Wert s' folgt die Konvergenz der für $z=0$ genommenen Taylor-Entwicklung (6) der Funktion (4) zum Wert s'. In Analogie zu 1. 1 gilt daher

Satz 2. 6 (Konvergenz einer Taylor-Entwicklung, Fall 2). *Die Laplace-Transformation*

$$f(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\,ds(t)$$

der Funktion $s(x)\in\mathfrak{V}$ *sei an der Stelle* $z=z_1$ *konvergent zum Wert* s'. *Dann ist für jeden festen Wert* a $(a>0)$ *die Taylor-Entwicklung von* $f(z)$ *nach Potenzen von* $z-(z_1+a)$ *an der Stelle* $z=z_1$ *ebenfalls konvergent zum Wert* s'.

Der Beweis ergibt sich, wenn man von $f(z)$ übergeht zu

$$F(z) = f(z + z_1) = \int_0^\infty e^{-zt}\, d\left(\int_{x=0}^{t} e^{-z_1 x}\, d\, s(x) \right). \quad —$$

Einfache Beispiele T'_a-limitierbarer Funktionen bekommt man, wenn man

$$s(x) = e^{cx} \qquad (c \text{ konstant})$$

setzt. T'_a ist auf dieses $s(x)$ genau dann anwendbar, wenn $\Re\, c < a$ ist. Es wird dann

$$T'_a(n;\, s(x)) = \left(\frac{a}{a - c} \right)^{n+1}.$$

Daraus erhält man z. B. (für $c = i$)

$$T'_a\text{-}\lim_{x \to \infty} \cos x = 0 \qquad (a > 0),$$

oder (für $a = 1$, $c = \frac{1}{2} + i$)

$$T'_1\text{-}\lim_{x \to \infty} (e^{x/2} \cos x) = 0.$$

Natürlich läßt sich das T'_a-Verfahren zur Summierung uneigentlicher Integrale nutzbar machen. Es existiere zu den komplexwertigen Funktionen $a(x)$ und $\alpha(x)$ für jedes $x > 0$ das Integral $\int_0^x a(x)\, d\, \alpha(x)$. Dann hat es einen Sinn, nach der Konvergenz des uneigentlichen Integrales

$$\int_0^\infty a(x)\, d\, \alpha(x)$$

zu fragen. Dieses soll T'_a-summierbar zum Wert s heißen, geschrieben

$$(T'_a) \int_0^\infty a(x)\, d\, \alpha(x) = s,$$

wenn das Teilintegral

$$s(x) = \int_0^x a(t)\, d\, \alpha(t) \qquad (x \geqq 0)$$

T'_a-limitierbar zum Wert s ist. So ist z. B.

$$(T'_1) \int_0^\infty e^{x/2} \cos x\, d\, x = -\tfrac{2}{5}.$$

Handelt es sich um das Laplace-Integral

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-zt}\, d\, t \qquad (\Re\, z > 0),$$

so ergibt sich (für jedes $a > 0$)

$$(T'_a) \int_0^\infty e^{-zt}\, dt = \frac{1}{z} \qquad \text{für } \Re z > -a,\ |z+a| > a,$$

wobei der angegebene z-Bereich der genaue Summierbarkeitsbereich des Integrales ist. Ist $\alpha(x) \in \mathfrak{V}$, so gilt

$$\alpha(0) + (T'_a) \int_0^\infty d\alpha(x) = T'_a\text{-}\lim_{x\to\infty} \alpha(x)$$

in dem Sinne, daß die Existenz der einen Seite die der anderen und Gleichheit beider Seiten zur Folge hat.

Es handle sich jetzt noch um das in § 1, (7) betrachtete Integral

$$\int_0^\infty a(x)\, dx \quad \text{mit} \quad s(x) = \int_0^x a(t)\, dt,$$

wo $a(x)$ für jedes $x_0 > 0$ im Intervall $(0, x_0)$ integrierbar und

$$F_1(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, a(t)\, dt$$

für $\Re z > 0$ konvergent sein soll. Es ist $s(x) \in \mathfrak{V}$, ferner $s(x) = o(e^{\varepsilon x})$ für $x \to \infty$ (für jedes feste $\varepsilon > 0$), und für $\Re z > 0$

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, ds(t) = z \int_0^\infty e^{-zt}\, s(t)\, dt = F_1(z).$$

T'_a ist also auf $s(x)$ anwendbar, und die nach (4) zu $s(x)$ gehörige Funktion $F(z)$ stimmt mit $F_1(z)$ überein. Dies zeigt, daß die für den vorliegenden Fall schon in § 1 gegebene Definition der T'_a-Summierbarkeit mit der in § 2 gegebenen zusammenfällt. Die Teilsummen der an der Stelle $z = 0$ genommenen Taylor-Entwicklung von $F(z) = F_1(z)$ nach Potenzen von $z - a$ stimmen wegen $s(0) = 0$ nach 2. 4 mit $T'_a(n; s(x))$ überein. Damit ist nun auch die Gleichung (13) des § 1 bewiesen.

§ 3.

Summierung Laplacescher Integrale.

Das zu der Funktion $\alpha(x) \in \mathfrak{V}$ gehörige Laplace-Integral

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, d\alpha(t) \qquad (\Re z > \eta) \tag{1}$$

besitze die Konvergenzabszisse $\eta\ (-\infty < \eta < \infty)$. Wir wählen ein T'_a-Verfahren positiver Ordnung a und fragen, für welche z und gege-

benenfalls zu welchem Wert (1) summierbar ist. Der Fall $\alpha(t) = t$ wurde schon bei den Beispielen am Schluß von § 2 behandelt.

Natürlich ist (1) für $\Re z > \eta$ zum Wert $f(z)$ summierbar. Um die Frage allgemein für die Stelle $z = z_0$ zu entscheiden, ist die Limitierbarkeit des Teilintegrales

$$s(x) = s(x, z_0) = \int_0^x e^{-z_0 t}\, d\alpha(t) \qquad (x \geqq 0) \tag{2}$$

zu untersuchen. Dabei kommt es auf das nach § 2, (4) zu $s(x)$ gehörige Integral

$$F(z) = F(z, z_0) = \int_0^{\infty} e^{-zt}\, ds(t)$$

mit der Konvergenzabszisse $\sigma = \sigma(z_0)$ und im Anwendbarkeitsfall auf seine für $z = 0$ genommene Taylor-Entwicklung nach Potenzen von $z - a$, d. h. auf die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-a)^n F^{(n)}(a), \tag{3}$$

an. Wegen

$$\int_0^{\infty} e^{-zt}\, ds(t) = \int_0^{\infty} e^{-(z+z_0)t}\, d\alpha(t)$$

ist $\sigma = \eta - \Re z_0$ und

$$F(z) = f(z + z_0) \qquad (\Re z > \eta - \Re z_0). \tag{4}$$

Satz 3.1 (Anwendbarkeit von T'_a). *a) Ist $\Re z_0 > \eta - a$, so ist T'_a auf $s(x, z_0)$ anwendbar. b) Ist $\Re z_0 < \eta - a$, so ist T'_a auf $s(x, z_0)$ nicht anwendbar.*

Der Beweis ergibt sich wegen $s(x, z_0) \in \mathfrak{V}$ aus den beiden an 2.3 anschließenden Bemerkungen. —

Im folgenden bezeichnen wir mit G und G' die beiden Kreisgebiete

$$G : |z - a| < a, \quad G' : |z + a| > a.$$

Mit $\overline{G}$ bezw. $\overline{G'}$ bezeichnen wir die durch Hinzunahme der Randpunkte abgeschlossenen Gebiete. Ist ζ eine komplexe Zahl, so verstehen wir unter $G + \zeta$ den Bereich der Punkte $z + \zeta$ mit $z \in G$. (Analog für G' usw.)

Satz 3.2 (Wirksamkeit von T'_a). *a) Es sei $\Re z_0 > \eta - a$ und $f(z)$ in dem Kreisgebiet $\overline{G} + z_0$, dessen Mittelpunkt im Innern der Konvergenzhalbebene von* (1) *liegt, regulär. Dann ist das Integral* (1) *an der Stelle $z = z_0$ T'_a-summierbar zum Wert $f(z_0)$. b) Das Integral* (1) *sei an der Stelle $z = z_0$ T'_a-summierbar. Dann ist $f(z)$ in dem Kreisgebiet $G + z_0$, dessen Mittelpunkt im Innern oder auf dem Rand der Konvergenzhalbebene von* (1) *liegt, regulär. (Vgl. Fig. 1.)*

Beweis. a) Nach 3. 1, a) ist T'_a auf $s(x)$ anwendbar. $F(z) = f(z+z_0)$ ist regulär in $\overline{G}$, also die TAYLOR-Entwicklung von $F(z)$ nach Potenzen von $z-a$ für $z=0$ konvergent zum Wert $F(0) = f(z_0)$. b) Nach 3. 2, b) ist

$$\Re(z_0 + a) \geqq \eta.$$

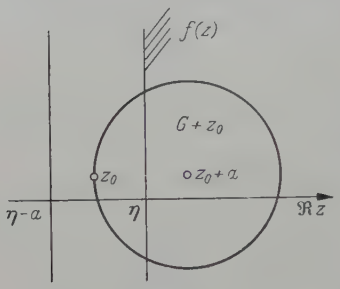

Fig. 1.

$F(z)$ ist regulär an der Stelle $z=a$, und die TAYLOR-Entwicklung von $F(z)$ nach Potenzen von $z-a$ ist für $z=0$ konvergent. Also ist $F(z)$ in G, d. h. $f(z)$ in $G+z_0$ regulär. —

Das nächste Ziel ist die Beschreibung des ganzen Summierbarkeitsbereiches, d. h. des Bereiches der z-Werte, für die (1) durch T'_a summiert wird. Dabei schließen wir (mit geringfügigen Modifikationen) an das Vorgehen von K. KNOPP [6] bei der Untersuchung der verallgemeinerten EULERschen Transformation von Potenzreihen an. Wir ordnen (vgl. [6], § 2) der Funktion $f(z)$ auf zweifache Art einen „Stern" zu.

1. Art. Für jede reelle Zahl y verstehen wir unter $x_1(y)$ die untere Grenze aller reellen $x \geqq \eta - a$, für die $f(z)$ in $G + (x + iy)$ regulär ist. Wir setzen $z_1(y) = x_1(y) + iy$. Ist $\Re z_1 > \eta - a$, so liegt auf dem Rand von $G + z_1(y)$ mindestens eine singuläre Stelle von $f(z)$. Zu y betrachten wir den offenen Halbstrahl $z = x + iy$ $(x > x_1(y))$. Die Vereinigungsmenge aller dieser Halbstrahlen für $-\infty < y < \infty$ bezeichnen wir als den zu $f(z)$ gehörigen Stern $S_1 = S_1(f(z), T'_a)$.

2. Art. Für jede reelle Zahl y denken wir uns $f(z)$ auf der Geraden $\Im z = y$ aus der Konvergenzhalbebene von (1) heraus nach links analytisch fortgesetzt. Den ersten dabei angetroffenen singulären Punkt, spätestens aber den Punkt $(\eta - a) + iy$, bezeichnen wir mit

$$z_2(y) = x_2(y) + iy \qquad (x_2(y) \text{ reell}).$$

Den in der Halbebene $\Re z > \eta - a$ gelegenen Teil des Durchschnittes aller Gebiete $G' + z_2(y)$ für $-\infty < y < \infty$ bezeichnen wir als den zu $f(z)$ gehörigen Stern $S_2 = S_2(f(z), T'_a)$.

Satz 3. 3 ($S_1 = S_2$). *Die Sternbereiche S_1 und S_2 fallen zusammen und bilden ein einfach zusammenhängendes Gebiet $S = S(f(z), T'_a)$, das die Halbebene $\Re z > \eta$ enthält und in der Halbebene $\Re z > \eta - a$ gelegen ist. In S ist $f(z)$ vermöge analytischer Fortsetzung aus der Konvergenzhalbebene von* (1) *heraus auf Parallelen zur reellen Achse eindeutig regulär.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $S_1 \subseteq S_2$. Sei $z_0 \in S_1$ und y reell. Zu zeigen ist:

$$\Re z_0 > \eta - a, \quad z_0 \in G' + z_2(y).$$

Wir setzen $z_0 = x_0 + iy_0$ (x_0, y_0 reell). Dann ist $x_0 > x_1(y_0) \geqq \eta - a$. Ist weiter $\Re z_2(y) = \eta - a$, so folgt $z_0 \in G' + z_2(y)$ unmittelbar. Ist aber

$\Re z_2(y) > \eta - a$, so ist $z_2(y)$ singulärer Punkt von $f(z)$. Da $f(z)$ in $\overline{G} + z_0$ regulär ist, folgt der Reihe nach

$$z_2(y) \notin \overline{G} + z_0, \quad z_2(y) - z_0 \notin \overline{G}, \quad -z_2(y) + z_0 \in G', \quad z_0 \in G' + z_2(y).$$

Um zu zeigen, daß $S_3 \leqq S_1$ ist, gehen wir aus von einer Stelle $z_0 \notin S_1$. Zu zeigen ist: $z_0 \notin S_2$. Aus $\Re z_0 \leqq \eta - a$ folgt $z_0 \notin S_2$ unmittelbar. Ist aber $\Re z_0 > \eta - a$, so ist $f(z)$ in $\overline{G} + z_0$ nicht regulär, gibt es also eine singuläre Stelle $z' \in \overline{G} + z_0$. Setzen wir dann $\Im z' = y'$, so folgt der Reihe nach

$$z_2(y') \in \overline{G} + z_0, \quad z_2(y') - z_0 \in \overline{G}, \quad -z_2(y') + z_0 \notin G', \quad z_0 \notin G' + z_2(y').$$

Die übrigen Behauptungen des Satzes ergeben sich unmittelbar, wenn man von der Konstruktion 1. Art von S ausgeht. —

Satz 3.4 (Summierbarkeitsgebiet S). *a) Die Stelle z gehöre zu S. Dann ist das Integral* (1) *T'_a-summierbar zum Wert $f(z)$. b) Die Stelle z gehöre nicht zu S und sei auch nicht Randpunkt von S. Dann ist das Integral* (1) *nicht T'_a-summierbar.*

Beweis. Wir ziehen 3.2 heran. a) Sei $z_0 \in S = S_1$. Dann ist $\Re z_0 > \eta - a$ und $f(z)$ in $\overline{G} + z_0$ regulär. b) Sei $z_0 \notin S = S_1$ und z_0 nicht Randpunkt von S. Ist $\Re z_0 < \eta - a$, so ist T'_a nach 3.1. b) nicht anwendbar. Ist $\Re z_0 \geqq \eta - a$, so ist $f(z)$ in $G + z_0$ nicht regulär. —

Satz 3.5 (Gleichmäßige Summierbarkeit in S). *In jedem beschränkten abgeschlossenen Teilbereich von $S = S(f(z), T'_a)$ ist das Integral* (1) *gleichmäßig T'_a-summierbar.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß es zu jeder Stelle $z_1 \in S$ einen Kreis mit z_1 als Mittelpunkt gibt, in dem gleichmäßige Summierbarkeit vorliegt. Sei $z_1 \in S = S_1$. Dann gibt es ein $r > 0$, so daß

$$f(z) \text{ regulär in } |z - (z_1 + a)| \leqq a + 2r \tag{5}$$

ist. Durch genügend kleine Wahl von r sei noch dafür gesorgt, daß der Kreis $|z - z_1| \leqq r$ in der Anwendbarkeitshalbebene von T'_a liegt. Es soll gezeigt werden, daß (1) gleichmäßig in z für $|z - z_1| \leqq r$ summierbar oder also (2) gleichmäßig in z_0 für $|z_0 - z_1| \leqq r$ limitierbar ist. Liegt z_0 in der Anwendbarkeitshalbebene, so besteht nach Satz 2.4 wegen $s(0, z_0) = 0$ die T'_a-Transformation von $s(x, z_0)$ aus den Teilsummen der Reihe (3). Wegen (4) ist also zu zeigen, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-a)^n f^{(n)}(a + z_0) \tag{6}$$

gleichmäßig konvergiert für $|z_0 - z_1| \leqq r$. Wir setzen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - (z_1 + a))^n.$$

Wegen (5) ist der Konvergenzradius dieser Reihe größer als $a+2r$, also

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{a+2r}, \qquad |a_n| \leqq \frac{M}{(a+2r)^n} \quad \text{für } n = 0, 1, \ldots$$

(M von n unabhängig). Für $|z-(z_1+a)| \leqq a+2r$ ist weiter

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} a_{n+\nu} (z-(z_1+a))^\nu \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

für $|z_0 - z_1| \leqq r$ also

$$\frac{1}{n!} |f^{(n)}(z_0+a)| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} |a_{n+\nu}| r^\nu \leqq \frac{M(a+2r)}{(a+r)^{n+1}}.$$

Daraus ergibt sich die gleichmäßige (und übrigens auch absolute) Konvergenz von (6) im angegebenen Kreis. —

§ 4.

Matrixbeziehungen.

Im folgenden treten Matrizen $V = (a_{n\nu}) = (a(n, \nu))$ auf (n Zeilen-, ν Spaltenindex; $n, \nu = 0, 1, \ldots$)[7]. Wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, schreiben wir auch $V = a_{n\nu}$. Soll angezeigt werden, wie die Indizes benannt sind, so schreiben wir $V_{n,\nu}$ statt V. Zur Matrix V gehört das Limitierungsverfahren V, bei dem eine Folge s_n limitierbar zum Wert s heißt, wenn (neben eventuellen weiteren Forderungen) die V-Transformation

$$(1) \qquad Vs = V(n; s_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

existiert und für $n \to \infty$ gegen s strebt. Wir betrachten auch solche Matrizen, bei denen der Zeilenindex oder der Spaltenindex oder beide kontinuierlich sind. Ist n (bezw. ν) kontinuierlich, so soll dafür x (bezw. t) geschrieben und der die Matrix bezeichnende Buchstabe links oben (bezw. rechts oben) mit einem Strich versehen werden. Beispiele: ${}'V = a(x, \nu)$; ${}'V' = a(x, t)$. Dabei sollen x und t aller positiven Werte fähig sein: $x > 0$, $t > 0$. Eine Matrix vom Typus ${}'V$ kann wie V zur Limitierung von Folgen verwendet werden. Matrizen vom Typus V' bezw. ${}'V'$ geben in analoger Weise Anlaß zu Limitierungsverfahren für Funktionen $s(x)$, die für $x \to \infty$ untersucht werden. An die Stelle der Summe in (1) tritt dabei ein Integral. Beispiel:

$$V's = V'(n; s(t)) = \int_0^{\infty} a(n, t)\, s(t)\, dt \qquad (n = 0, 1, \ldots)^8).$$

[7]) Die Verwendung von Matrizen in der Limitierungstheorie ist geläufig (vgl. z. B. [7]). Es handelt sich jetzt nur um die Festlegung einiger Bezeichnungen.

[8]) Natürlich müssen V', ${}'V'$ und $s(x)$ geeigneten Integrierbarkeitsvoraussetzungen genügen.

Sind zwei Matrizen $V = a(n, \nu)$, $W = b(n, \nu)$ gegeben, so kann man formal die Produktmatrix

$$(2) \qquad VW = (VW)_{n,\nu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a(n, \mu)\, b(\mu, \nu) \quad (n, \nu = 0, 1, \ldots)$$

bilden. Konvergieren alle diese Reihen, so ist VW eine Matrix U. Analoge Produktbildungen sind im Falle kontinuierlicher Indizes möglich. An die Stelle der Reihe in (2) tritt dann gegebenenfalls ein Integral. Beispiel: $V' = a(n, t)$, $'W' = b(x, t)$,

$$V'\,'W' = (V'\,'W')_{n,t} = \int_0^{\infty} a(n, y)\, b(y, t)\, dy \quad (n = 0, 1, \ldots, t > 0);$$

sind die nötigen Integrierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt und ist das Integral stets konvergent, so ist $V'\,'W'$ eine Matrix U'. Nur solche Produkte sind definiert, bei denen der zweite Index des ersten Faktors und der erste Index des zweiten Faktors miteinander nicht kontinuierlich oder kontinuierlich sind. Je nachdem hat man bei der Produktbildung eine Summe oder ein Integral zu benützen. Das Ergebnis ist im Existenzfall eine Matrix, deren erster (zweiter) Index zusammen mit dem ersten (zweiten) Index des ersten (zweiten) Faktors nicht kontinuierlich oder kontinuierlich ist. Beispiele: $'V\,W = 'U$; $'V\,'W'$ ist nicht definiert.

Wir stellen nun die im folgenden vorkommenden Matrizen und zugehörigen Limitierungsverfahren zusammen.

Taylorsches Verfahren zur Limitierung von Folgen (vgl. § 1):

$$T_\alpha = (1-\alpha)^{n+1} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Taylorsches Verfahren zur Limitierung von Funktionen:

$$T'_a = \frac{a^{n+1}}{n!}\, t^n e^{-at} \qquad (a > 0).$$

Abelsches Verfahren zur Limitierung von Folgen:

$$'A = \frac{1}{x+1} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\nu}.$$

Abelsches Verfahren zur Limitierung von Funktionen:

$$'A' = \frac{1}{x}\, e^{-t/x}.$$

Borelsches Verfahren:

$$'B = e^{-x}\, \frac{x^{\nu}}{\nu!}.$$

S_α-Verfahren (vgl. [9] bis [11]):

$$S_\alpha = (1-\alpha)^{n+1} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Cesàrosches Verfahren zur Limitierung von Folgen:

$$C_k = \begin{cases} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} \Big/ \binom{n+k}{n} & \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n \\ 0 & \text{für } \nu > n \end{cases} \qquad (k > 0).$$

Cesàrosches Verfahren zur Limitierung von Funktionen:

$${}'C'_k = \begin{cases} \frac{k}{x}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{k-1} & \text{für } 0 < t \leqq x \\ 0 & \text{für } t > x \end{cases} \qquad (k > 0).$$

Statt der Matrix T_α betrachten wir allgemeiner (vgl. [11]) die Matrix

$$T_{\alpha,k} = \begin{cases} (1-\alpha)^{n+k+1}\binom{\nu+k}{\nu-n}\alpha^{\nu-n} & \text{für } \nu \geqq n \\ 0 & \text{für } 0 \leqq \nu < n \end{cases} \qquad (0 < \alpha < 1,\ k \geqq 0).$$

Statt der Matrix T'_a betrachten wir allgemeiner die Matrix

$$T'_{a,k} = \frac{a^{n+k+1}}{\Gamma(n+k+1)} t^{n+k} e^{-at} \qquad (a > 0,\ k \geqq 0).$$

Es ist $T_{\alpha,0} = T_\alpha$, $T'_{a,0} = T'_a$; ist k positiv ganz, so entsteht $T_{\alpha,k}$ aus T_α durch Streichen der k ersten Zeilen und der k ersten Spalten, $T'_{a,k}$ aus T'_a durch Streichen der k ersten Zeilen. Alle aufgeführten Matrizen genügen den bekannten hinreichenden Bedingungen für Permanenz.

Wir betrachten nun Matrixprodukte, bei denen T'_a als Faktor auftritt. Die folgenden Sätze 4.1. bis 4.3 verifiziert man durch direktes Ausrechnen der fraglichen Produktmatrizen.

Satz 4.1 ($T_\alpha T'_a$). *Es sei* $0 < \alpha < 1$, $a > 0$, $k \geqq 0$ *und* $b = (1-\alpha)a$, *also* $b > 0$. *Dann ist das Produkt* $T_{\alpha,k} T'_{a,k}$ *vorhanden, und es ist*

$$T_{\alpha,k} T'_{a,k} = T'_{b,k}.$$

Insbesondere ist

$$T_\alpha T'_a = T'_b.$$

Satz 4.2 (${}'A T'_a$). *Es sei* $a > 0$. *Dann ist das Produkt* ${}'A T'_\alpha$ *vorhanden, und es ist*

$$({}'A T'_a)_{x,t} = {}'A'_{y,t},$$

wobei zwischen x *und* y *der Zusammenhang* $y = (x+1)/a$ *besteht.*

Satz 4.3 ($T'_a{}'B$). *Es sei* $a > 0$ *und* $\alpha = 1/(a+1)$, *also* $0 < \alpha < 1$. *Dann ist das Produkt* $T'_a{}'B$ *vorhanden, und es ist*

$$T'_a{}'B = S_\alpha.$$

Es soll nun noch T'_a mit den Matrizen des Cesàroschen Verfahrens multipliziert werden. In Frage kommen die Bildungen $C_k T'_a$ und

$T_a' C_k'$ $(a > 0,\ k > 0)$. $C_k T_a'$ existiert, weil C_k untere Dreiecksmatrix ist. $T_a' C_k'$ existiert, wie man durch explizite Bildung des Produktes feststellt[9]). Es ist aber

$$C_k T_a' \neq T_a' C_k' \qquad \text{für alle Paare } a, k. \tag{3}$$

Um dies nachzuweisen, vergleichen wir die jeweils erste Zeile $(n = 0)$ der beiden Produktmatrizen miteinander. Es ist

$$(C_k T_a')_{0,t} = a e^{-at},$$

$$(T_a' C_k')_{0,t} = a k \int_t^\infty e^{-ay} \frac{(y-t)^{k-1}}{y^k}\, dy$$

$$= a k e^{-at} \int_0^\infty \frac{u^{k-1}}{(t+u)^k}\, e^{-au}\, du$$

$$< a k \frac{e^{-at}}{t^k} \int_0^\infty u^{k-1} e^{-au}\, du = \frac{\Gamma(k+1)}{a^{k-1}} \frac{e^{-at}}{t^k}.$$

Für große t ist also $(C_k T_a')_{0,t} \neq (T_a' C_k')_{0,t}$. Damit ist (3) bewiesen. Ähnlich wie bei T_a (vgl. [11]) gilt nun aber

Satz 4.4 $(C_k T_a')$. *Es sei $a > 0$, $k > 0$. Dann sind die Produkte $C_k T_a'$ und $T_{a,k}' C_k'$ vorhanden, und es ist*

$$C_k T_a' = T_{a,k}' C_k'.$$

Beweis. Bildet man die beiden fraglichen Produkte, so sieht man nach Kürzung mit $\frac{a k}{\Gamma(n+k+1)}$, daß man für $n = 0, 1, \ldots, t > 0$ die Beziehung

$$\Gamma(n+1)\, e^{-at} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\Gamma(n-\mu+k)\, a^\mu\, t^\mu}{\Gamma(n-\mu+1)\, \Gamma(\mu+1)} = a^{n+k} \int_t^\infty y^n (y-t)^{k-1} e^{-ay}\, dy \tag{4}$$

zu verifizieren hat. Die gewiß konvergente rechte Seite von (4) ist gleich

$$a^{n+k} e^{-at} \int_0^\infty (u+t)^n\, u^{k-1}\, e^{-au}\, du$$

und geht bei Entwicklung des Binoms $(u+t)^n$ in

$$\Gamma(n+1)\, e^{-at} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{a^\mu\, t^\mu}{\Gamma(\mu+1)\, \Gamma(n-\mu+1)} \int_{au=0}^\infty (a u)^{n-\mu+k-1}\, e^{-au}\, d(a u)$$

über, ist also gleich der linken Seite von (4). —

[9]) Hier und später müssen wir beim Arbeiten mit $'C_k'$ für $0 < k < 1$ ausnahmsweise (entgegen der Verabredung am Schluß von § 1) Integrale zulassen, die im Endlichen uneigentlich sind.

§ 5.

Erweiterte Definition des T'_a-Verfahrens. Argumentverschiebung.

Die Definition 2.3 bot sich beim Aufbau des T'_a-Verfahrens unmittelbar dar und reichte aus für die Summierung Laplacescher Integrale zum Zwecke analytischer Fortsetzung der dargestellten Funktionen. Im Hinblick auf die Matrix T'_a ist es jedoch naheliegend, die Definition zu erweitern.

Definition 5.1 (Funktionsklasse $\mathfrak{S}$). *Die komplexwertige Funktion $s(x)$ der reellen Veränderlichen x heißt zur Klasse $\mathfrak{S}$ gehörig, wenn sie für $x \geqq 0$ definiert und für jedes $x_0 > 0$ im Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ beschränkt und im Riemannschen Sinn integrierbar ist.*

Definition 5.2 (Verfahren T'_a, Erweiterung). *Ist $a > 0$, so heißt T'_a auf die Funktion $s(x)$ anwendbar, wenn $s(x) \in \mathfrak{S}$ und*

$$T'_a s = T'_a(n; s(x)) = \frac{a^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-at} s(t)\, dt$$

für $n = 0, 1 \ldots$ existiert. Die Funktion $s(x)$ heißt durch T'_a zum Wert s limitierbar, wenn T'_a auf $s(x)$ anwendbar und $\lim\limits_{n \to \infty} T'_a s = s$ ist.

T'_a-Anwendbarkeit bezw. T'_a-Limitierbarkeit bei einer Funktion $s(x)$ im Sinne von 2.3 hat Anwendbarkeit bezw. Limitierbarkeit im Sinne von 5.2 zur Folge. Für den Rest der Arbeit (§ 5, § 6) sind die fraglichen Begriffe im Sinne von 5.2 aufzufassen. Natürlich ist das Verfahren auch in der neuen Form im Bereich der Funktionen $s(x) \in \mathfrak{S}$ permanent.

Unter einer zusätzlichen Voraussetzung können wir eine funktionentheoretische Seite des Verfahrens zurückgewinnen. Es gilt nämlich

Satz 5.3 (Zusammenhang von T'_a mit einer Taylor-Entwicklung). *Es sei T'_a auf $s(x)$ anwendbar, und die für $\Re z > a$ erklärte Funktion*

$$F(z) = z \int_0^\infty e^{-zt} s(t)\, dt$$

an der Stelle $z = a$ regulär. Dann stimmt für $z = 0$ die Folge der Teilsummen der Taylor-Entwicklung von $F(z)$ nach Potenzen von $z - a$ überein mit der Folge $T'_a(n; s(x))$, so daß also dann und nur dann $T'_a\text{-}\lim\limits_{x \to \infty} s(x) = s$ ist, wenn die genannte Entwicklung für $z = 0$ zum Wert s konvergiert.

Beweis. Für $\Re z > a$ und $\nu = 0, 1, \ldots$ ist

$$(-1)^\nu F^{(\nu)}(z) = z \int_0^\infty t^\nu e^{-zt} s(t)\, dt - \nu \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-zt} s(t)\, dt.$$

Für $z \to a$ bei Annäherung von z an a auf der reellen Achse von rechts her folgt daraus

$$(-1)^\nu F^{(\nu)}(a) = \int_0^\infty (at - \nu)\, t^{\nu-1} e^{-at} s(t)\, dt.$$

Die im Satz genannte Taylor-Entwicklung hat an der Stelle $z = 0$ also die 0-te Teilsumme

$$a \int_0^\infty e^{-at} s(t)\, dt = T_a'(0; s(x)),$$

und für $n = 1, 2, \ldots$ die n-te Teilsumme

$$a \int_0^\infty e^{-at} s(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a^\nu}{\nu!} \int_0^\infty (at - \nu)\, t^{\nu-1} e^{-at} s(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty \left[\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a^{\nu+1} t^\nu}{\nu!} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a^\nu t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right] e^{-at} s(t)\, dt = T_a' s. \quad —$$

Satz 5.4 (Konvergenz einer Taylor-Entwicklung, Fall 3). *Für die Funktion* $s(x) \in \mathfrak{S}$ *sei* $\lim_{x \to \infty} s(x) = s$. *und es sei* $a > 0$. *Dann ist die Taylor-Entwicklung der für* $\Re z > 0$ *regulären Funktion*

$$F(z) = z \int_0^\infty e^{-zt} s(t)\, dt$$

nach Potenzen von $z - a$ *für* $z = 0$ *konvergent zum Wert* s.

Beweis. Wegen der Konvergenz von $s(x)$ für $x \to \infty$ ist T_a' auf $s(x)$ anwendbar. Wegen der Permanenz von T_a' ist $T_a'\text{-}\lim_{x \to \infty} s(x) = s$. Die Behauptung ergibt sich nun aus 5.3. —

Wir prüfen jetzt noch, wie sich bei einer zu limitierenden Funktion eine Argumentverschiebung auswirkt. Darüber gilt

Satz 5.5 (Zulässigkeit einer Argumentverschiebung). *Es sei* $s(x) \in \mathfrak{S}$, *und für eine Zahl* $c > 0$

$$S(x) = S_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq x < c \\ s(x - c) & \text{für } c \leqq x < \infty. \end{cases}$$

a) Ist T_a' *auf* $s(x)$ *anwendbar, dann ist* T_a' *auf* $S(x)$ *anwendbar, und umgekehrt. b) Aus* $T_a'\text{-}\lim_{x \to \infty} s(x) = s$ *folgt* $T_a'\text{-}\lim_{x \to \infty} S(x) = s$ *und umgekehrt.*

Beweis. a) Es sei T_a' auf $s(x)$ anwendbar. Dann existiert für $n = 0, 1, \ldots$

$$t_n = T_a'(n; s(x)) = \frac{a^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-at} s(t)\, dt.$$

Also existiert auch

$$t'_n = T'_a(n; S(x)) = \frac{a^{n+1} e^{-ac}}{n!} \lim_{x \to \infty} \int_0^x (t+c)^n e^{-at} s(t)\, dt$$

$$= \frac{a^{n+1} e^{-ac}}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} c^{n-\nu} \lim_{x \to \infty} \int_0^x t^\nu e^{-at} s(t)\, dt$$

$$= (ac)^n e^{-ac} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{t_\nu}{(n-\nu)!\,(ac)^\nu} .$$

Aus der Existenz von t'_n für $n = 0, 1, \ldots$ ergibt sich in gleicher Weise die Existenz von

$$t_n = (-ac)^n e^{ac} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{t'_\nu}{(n-\nu)!\,(-ac)^\nu} .$$

b) Es sei T'_a auf $s(x)$ und $S(x)$ anwendbar. Die Behauptung ergibt sich unter Benützung der gleich nachher definierten Matrix K_p und ihrer Permanenz aus

$$t'_n = K_p(n; t_\nu) \ (p = ac), \quad t_n = K_p(n; t'_\nu) \ (p = -ac). \ —$$

Wir definieren für beliebiges komplexes p die Matrix K_p mit nicht kontinuierlichen Zeilen- und Spaltenindizes $n, \nu = 0, 1, \ldots$. Es sei $K_0 = E$, wo E die Einheitsmatrix bedeutet; für $p \neq 0$ sei

$$K_p = \begin{cases} \dfrac{p^{n-\nu} e^{-p}}{(n-\nu)!} & \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n \\ 0 & \text{für } n < \nu < \infty. \end{cases}$$

K_p ist eine (untere) Dreiecksmatrix.

Satz 5.6 ($K_p K_q$). *Für beliebige Zahlen p, q ist*

$$K_p K_q = K_{p+q}.$$

Beweis. Ist mindestens eine der Zahlen p, q gleich Null, so ist nichts zu beweisen. Die Fälle $p \neq -q$ ($p, q \neq 0$) und $p = -q$ ($p, q \neq 0$) verifiziert man durch direktes Ausrechnen von $K_p K_q$. —

Zur Matrix K_p gehört das Verfahren K_p zur Limitierung von Folgen s_n ($n = 0, 1, \ldots$), bei dem $K_p\text{-}\lim_{n \to \infty} s_n = s$ gleichbedeutend mit $K_p(n; s_\nu) \to s$ für $n \to \infty$ ist.

Satz 5.7 (Konvergenzgleichheit von K_p). *Das Verfahren K_p ist konvergenzgleich, d. h. K_p ist permanent und vermag nur konvergente Folgen zu limitieren.*

Beweis. Daß K_p den bekannten Permanenzbedingungen genügt, verifiziert man unmittelbar. Aus

$$t_n = K_p s = K_p(n; s_\nu) \to s \qquad \text{für } n \to \infty$$

folgt

$$s_n = E s = (K_{-p} K_p) s = K_{-p}(K_p s) = K_{-p}(n; t_\nu) \to s. \ —$$

§ 6.

Vergleichs- und Verträglichkeitssätze.

In diesem Paragraphen werden Vergleichs- und Verträglichkeitssätze behandelt, die mit dem T'_a-Verfahren in Zusammenhang stehen. Sind zwei Limitierungsverfahren vorgelegt, so handelt es sich bei den Vergleichssätzen um den Vergleich ihrer Wirkungsfelder, bei den Verträglichkeitssätzen um die Frage, ob für eine Funktion, die im Wirkungsfeld beider Verfahren liegt, die beiden verallgemeinerten Grenzwerte übereinstimmen. Es wird von den in § 4 eingeführten Bezeichnungen Gebrauch gemacht.

Zuerst werden die T'_a-Verfahren unter sich verglichen. Satz 5. 1 zeigt, daß das Verfahren T'_a (mit einer aus der Formulierung des Satzes ersichtlichen Einschränkung) um so stärker ist, je kleiner seine Ordnung ist.

Satz 6. 1 ($T'_a \to T'_b$-Satz). *Es sei* $0 < b < a$, $T'_a\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$ *und* T'_b *auf* $s(x)$ *anwendbar. Dann ist* $T'_b\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$.

Beweis. Wegen der Anwendbarkeit von T'_b auf $s(x)$ ist

$$F(z) = z \int_0^\infty e^{-zt}\, s(t)\, dt$$

für $\Re z > b$ konvergent. Wegen $T'_a\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$ ist nach 5. 3

$$F(z) = \sum_{n\,0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

für $|z-a| < a$ regulär, und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-a)^n = s.$$

Wird daher

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n \qquad \text{für } |z-b| < b$$

gesetzt, so ist nach 1. 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (-b)^n = s.$$

Wegen 5. 3 ergibt dies die Behauptung. —

Einen zweiten Beweis können wir unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß T'_b auf $|s(x)|$ anwendbar ist, folgendermaßen führen. Wir setzen $\alpha = 1 - b/a$, so daß $0 < \alpha < 1$ ist. Nach 4. 1 ist dann $T'_b = T_a T'_a$. Wegen der Permanenz von T_a ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus der Beziehung

$$(T_a T'_a)\, s = T_a (T'_a\, s). \tag{1}$$

Zur Verifikation von (1) sei

$$T_\alpha = a(n, \nu) \geqq 0, \quad T'_a = b(n, t) \geqq 0$$

gesetzt. Die Folgen

$$T'_b s = T'_b(n; s(x)) \quad \text{und} \quad T'_b |s| = T'_b(n; |s(x)|)$$

sind vorhanden. Es existiert also

$$(T_\alpha T'_a) s = \int_0^\infty \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} a(n, \mu)\, b(\mu, t) \right) s(t)\, dt,$$

und dieser Ausdruck existiert auch, wenn s durch $|s|$ ersetzt wird. Daher darf die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht werden, und man erhält

$$(T_\alpha T'_a) s = \sum_{\mu=0}^{\infty} a(n, \mu) \left(\int_0^\infty b(\mu, t)\, s(t)\, dt \right) = T_\alpha (T'_a s). \; —$$

Aus 6. 1 folgt insbesondere die Verträglichkeit der Verfahren T'_a und T'_b, d. h. wenn $T'_a\text{-}\lim\limits_{x \to \infty} s(x) = s$ und $T'_b\text{-}\lim\limits_{x \to \infty} s(x) = s_1$ ist, so ist $s = s_1$. Tiefer als 6. 1 liegt der folgende Satz 6. 2, der die Äquivalenz aller T'_a-Verfahren im Bereich der beschränkten Funktionen behauptet. Der Beweis ist jedoch einfach, wenn man sich auf den entsprechenden Satz für die T_α-Verfahren stützt.

Satz 6. 2 (Äquivalenz der T'_a-Verfahren bei beschränkten Funktionen). *Es sei* $a > 0$, $b > 0$, $s(x) \in \mathfrak{S}$ *für* $x \geqq 0$ *beschränkt, und* $T'_a\text{-}\lim\limits_{x \to \infty} s(x) = s$. *Dann ist* $T'_b\text{-}\lim\limits_{x \to \infty} s(x) = s$.

Beweis. Wegen der Beschränktheit von $s(x)$ ist T'_c für jede Zahl $c > 0$ auf $|s(x)|$ anwendbar. Die Behauptung folgt im Fall $b \leqq a$ aus 6. 1. Der wesentliche Inhalt des Satzes liegt beim Fall $a < b$. Um den Beweis allgemein zu führen, wählen wir eine nun festgehaltene Zahl $c > \mathrm{Max}(a, b)$. Die Folge

$$t_n = T'_c s = \frac{c^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-ct} s(t)\, dt \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

ist definiert und (wegen der Beschränktheit von $s(x)$) beschränkt. Setzen wir

$$\alpha = 1 - \frac{a}{c} \quad (0 < \alpha < 1), \qquad \beta = 1 - \frac{b}{c} \quad (0 < \beta < 1),$$

so ist nach 4. 1

$$T'_a = T_\alpha T'_c, \quad T'_b = T_\beta T'_c.$$

Analog zu (1) ergibt sich

$$T'_a(n; s(x)) = T_\alpha(n; t_\nu), \quad T'_b(n; s(x)) = T_\beta(n; t_\nu).$$

Aus $T'_a s \to s$ folgt $T_\alpha(n; t_\nu) \to s$, daraus [10]) $T_\beta(n; t_\nu) \to s$, also $T'_b s \to s$. —

[10]) Siehe [5], Kapitel IX; vgl. auch [9], S. 299, Satz 25.

Die Möglichkeit, mit Hilfe von 6. 2 einen Umkehrsatz des T'_a-Verfahrens mit zweiseitiger O-TAUBER-Bedingung herzuleiten, sei erwähnt, aber an dieser Stelle nicht weiter verfolgt.

Es soll nun (bei festgehaltener Ordnung $a > 0$) das Verfahren T'_a mit dem ABELschen Verfahren $'A'$ verglichen werden. $'A'$ heiße auf $s(x)$ anwendbar, wenn $s(x) \in \mathfrak{S}$ und wenn

$$'A's = 'A'(x; s(t)) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t/x} s(t)\, dt$$

konvergiert für $x > 0$. $'A'\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s$ heiße, daß $'A'$ auf $s(x)$ anwendbar und $\lim_{x\to\infty} 'A's = s$ ist. Es gilt

Satz 6. 3 ($T'_a \to 'A'$-Satz). *Es sei* $T'_a\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s$ *und* $'A'$ *auf* $s(x)$ *anwendbar. Dann ist* $'A'\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s$.

Beweis. Für $\Re z > 0$ ist

$$F(z) = z \int_0^\infty e^{-zt} s(t)\, dt$$

konvergent. Wird

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad \text{für } |z-a| < a$$

gesetzt, so ist wegen $T'_a s \to s$ nach 5. 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-a)^n = s.$$

Nach dem klassischen ABELschen Stetigkeitssatz ist also bei Annäherung auf der reellen Achse $\lim_{z\to+0} F(z) = s$. —

Aus 6. 3 folgt insbesondere, daß die Verfahren T'_a und $'A'$ miteinander verträglich sind.

Wir vergleichen weiter die Verfahren $T'_a (a > 0)$ und $'C'_k (k > 0)$ miteinander. $'C'_k\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s$ soll heißen, daß $s(x) \in \mathfrak{S}$ und

$$'C'_k s = 'C'_k(x; s(t)) = \frac{k}{x} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1} s(t)\, dt \to s$$

strebt für $x \to \infty$.

Satz 6. 4 (Verträglichkeit von T'_a und $'C'_k$). *Es sei* $a > 0$, $k > 0$, $T'_a\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s$ *und* $'C'_k\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s_1$. *Dann ist* $s = s_1$.

Beweis. Ist $0 < k \leqq 1$, so folgt aus $'C'_k\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s_1$, daß $'A'\text{-}\lim_{x\to\infty} s(x) = s_1$ ist. Nach 6. 3 ist dann $s = s_1$. Für $k > 1$ versagt diese Schlußweise. (Vgl. [8].)

Beim Beweis für beliebige $k > 0$ können wir uns etwa auf ganzzahlige $k > 0$ beschränken, da aus $0 < l < m$ und ${}'C_l' s \to s_1$ bekanntlich ${}'C_m' s \to s_1$ folgt. Es liegt nahe, 4. 4 heranzuziehen. Jedoch kommen wir damit nur dann ohne weiteres zum Ziel, wenn vorausgesetzt wird, daß T_a' auf $|s(x)|$ anwendbar ist. Dies sei der Fall. Da C_k untere Dreiecksmatrix ist, ergibt sich dann ohne Schwierigkeit

$$C_k(T_a' s) = (C_k T_a') s = (T_{a,k}' {}'C_k') s, \tag{2}$$

$$C_k(T_a' |s|) = (C_k T_a') |s| = (T_{a,k}' {}'C_k') |s| \tag{3}$$

mit gesicherter Existenz der vorkommenden Ausdrücke. Wir wollen zeigen, daß

$$(T_{a.k}' {}'C_k') s = T_{a,k}' ({}'C_k' s) \tag{4}$$

ist. Dazu setzen wir

$$T_{a,k}' = a(n,t) \geqq 0, \qquad {}'C_k' = b(x,t) \geqq 0.$$

Für jedes $n = 0, 1, \ldots$ ist dann

$$(T_{a,k}' {}'C_k') s = \int_{t=0}^{\infty} \left(\int_{y=0}^{\infty} a(n,y)\, b(y,t)\, dy \right) s(t)\, dt. \tag{5}$$

Dieser Ausdruck existiert auch, wenn man den Integranden durch seinen absoluten Betrag ersetzt (vgl. (3)). Deswegen, weil ferner, wie leicht zu sehen ist,

$$\int_{t=0}^{\cdot} b(y,t)\, s(t)\, dt = \int_{t=0}^{y} b(y,t)\, s(t)\, dt = {}'C_k'(y; s(t))$$

und ${}'C_k'(y; |s(t)|)$ als Funktionen von y in jedem Intervall $0 \leqq y \leqq y_0$ eigentlich Riemann-integrierbar sind, weil schließlich der Integrand von (5) im Quadranten $t > 0$, $y > 0$ der t, y-Ebene eine meßbare Funktion von t und y ist, darf in (5) die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden [11]). Man erhält dann (4). Zusammen mit (2) folgt

$$C_k(T_a' s) = T_{a,k}' ({}'C_k' s).$$

Wegen $T_a' s \to s$, ${}'C_k' s \to s_1$ und der Permanenz der Matrizen C_k und $T_{a.k}'$ ergibt sich nun $s = s_1$.

Um schließlich den Nachweis ohne die Zusatzvoraussetzung der Anwendbarkeit von T_a' auf $|s(x)|$ zu führen, sind umfangreichere Beweismittel notwendig. Es ist

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} s(t)\, dt$$

[11]) Man kann von den Riemannschen zu Lebesgueschen Integralen übergehen, einen bekannten Satz von G. Fubini anwenden und dann zu Riemannschen Integralen zurückkehren.

konvergent für $\Re z > a$. Wir bilden die $\mathfrak{L}^{(k)}$-Transformierte von $s(x)$ im Sinne von G. Doetsch (vgl. [2], 9. Kapitel):

$$\mathfrak{L}^{(k)}\{s\} = \lim_{x \to \infty} C^{(k)}(x; z; s(t))$$

mit

$$C^{(k)}(x; z; s(t)) = \frac{1}{x^k} \int_0^x e^{-zt}(x-t)^k s(t)\, dt \qquad (x > 0).$$

Wegen ${}'C'_{k+1}\text{-}\lim_{x \to \infty} s(x) = s_1$ ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{k+1}{x^{k+1}} \int_0^x (x-t)^k s(t)\, dt = s_1,$$

also

$$C^{(k)}(x; 0; s(t)) \cong \frac{s_1}{k+1} x \qquad (x \to \infty).$$

Nach D. Gaier (vgl. [4], § 8; andeutungsweise findet man den benötigten Sachverhalt auch in [3], § 2) folgt daraus, daß $\mathfrak{L}^{(k)}\{s\}$ für $\Re z > 0$ existiert, also $f(z)$ für $\Re z > 0$ regulär ist, und daß bei reeller Annäherung von z an $z = 0$

$$\lim_{z \to +0} z f(z) = s_1$$

ist. Dieser Grenzwert ist nach 5. 3 und dem klassischen Abelschen Stetigkeitssatz andererseits aber auch gleich s. —

Der folgende Satz 6. 5 über den Zusammenhang der Verfahren ${}'B$ und S_α ist bekannt (vgl. [9], S. 283). Er wird hier mit aufgeführt, weil für ihn das T'_a-Verfahren eine wesentliche Rolle spielt und dessen funktionentheoretische Seite, z. B. in der Gestalt 2. 6, einen neuen Beweis ermöglicht, der auch die Matrixrelation 4. 3 verständlich macht.

Satz 6. 5. (${}'B \to S_\alpha$-Satz). *Für die Folge* s_n $(n = 0, 1, \ldots)$ *und die Zahl* α $(0 < \alpha < 1)$ *sei* ${}'B\text{-}\lim_{n \to \infty} s_n = s$ *und* S_α *auf* s_n *anwendbar. Dann ist* $S_\alpha\text{-}\lim_{n \to \infty} s_n = s$.

Beweis. Der Folge s_n ordnen wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{mit den Teilsummen} \quad s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$$

zu. Wegen der Anwendbarkeit von S_α auf s_n konvergiert das Funktionselement

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mindestens für $|z| < \alpha$ (vgl. [9], S. 273). Daher ist

$$G(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) - a_0 \tag{6}$$

bei $z = \infty$ regulär und verschwindend, außerdem regulär für $\Re z > 1/\alpha$.

Dann ist aber, wenn

$$h(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu+1}}{\nu!}\, t^{\nu} \qquad (t \geqq 0)$$

gesetzt wird,

$$G(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt}\, h(t)\, dt \qquad \left(\Re z > \frac{1}{\alpha}\right), \tag{7}$$

und die Aussage ${}'B\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$, d.h. die Existenz der ${}'B$-Transformation

$${}'B(x;\, s_\nu) = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu}{\nu!}\, x^{\nu}$$

für $x > 0$ und ihre Konvergenz zum Wert s für $x \to \infty$, äquivalent mit der Konvergenz des LAPLACE-Integrales (7) für $z = 1$ zum Wert $s - a_0$ (vgl. [2], S. 358, 380 ff., 464). $G(z)$ ist also für $\Re z > 1$ regulär. Setzt man

$$s(t) = \int_0^{t} h(x)\, dx \qquad (t \geqq 0),$$

so ist

$$G(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt}\, d\, s\,(t) \qquad (\Re z > 1),$$

mit Konvergenz dieses Integrales für $z = 1$ zum Wert $s - a_0$. Nach 2.6 konvergiert infolgedessen wegen (6) die TAYLOR-Entwicklung von $g(1/z)$ nach Potenzen von $z - 1/\alpha$ für $z = 1$ zum Wert s. Weil $G(z)$ bei $z = 1/\alpha$, also $g(z)$ bei $z = \alpha$ regulär ist, heißt dies aber (vgl. [10], S. 347), daß $S_\alpha\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ist [12]). —

[12]) Der in [9], S. 281—283, gegebene Beweis von 6.5 beruhte auf der Beziehung

$$S_\alpha s = T_a^{l}({}'B\, s) \qquad (a = (1-\alpha)/\alpha),$$

die anders als dort auch aus 4.3 hergeleitet werden könnte.

Literaturverzeichnis.

COWLING, V. F.

[1] Summability and analytic continuation, Proc. Amer. math. Soc. **1**, 536—542 (1950).

DOETSCH, G.

[2] Handbuch der LAPLACE-Transformation I, Basel (1950).

GAIER, D.

[3] Über stetiges und asymptotisches Verhalten von Potenzreihen und DIRICHLETschen Reihen am Rande von Summationsgebieten, Math. Zeitschr. **53**, 291—308 (1950/51).

[4] ABELsche Sätze für Potenzreihen, DIRICHLET-Reihen und LAPLACE-Integrale, Dissertation, Stuttgart 1952.

Hardy, G. H.
[5] Divergent series, Oxford (1949).
Knopp, K.
[6] Über Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern durch Anwendung der Eulerschen Reihentransformation, Acta math. **47**, 313—335 (1926).
[7] Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der C- und H-Verfahren, Math. Zeitschr. **47**, 229—264 (1942).
[8] Eine Bemerkung zur C_k- und A-Limitierung von Funktionen, Math. Zeitschr. **50**, 155—160 (1944).
Meyer-König, W.
[9] Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. **52**, 257—304 (1950).
[10] Die E_p- und S_α-Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze, Math. Zeitschr. **52**, 344—354 (1950).
[11] Beziehungen zwischen einigen Matrizen der Limitierungstheorie, Math. Zeitschr. **53**, 450—453 (1950/51).
Teghem, J.
[12] Sur des transformations de séries, Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **36**, 730—741 (1950).
[13] Sur des transformations de séries, Application aux séries entières, Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **37**, 21—33 (1951).
Vermes, P.
[14] Certain classes of series to series transformation matrices, Amer. J. Math. **72**, 615—620 (1950).
[15] Conservative series to series transformation matrices, Acta Sci. math., Szeged **14**, 23—38 (1951).
Widder, D. V.
[16] The Laplace Transform, Princeton (1946).

(Eingegangen am 29. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 206—207 (1952).

Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

Helmut Wielandt in Tübingen.

Der bekannte Beweis von Karamata[1]) für die Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes läßt sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, in eine Fassung bringen, die durch ihre Kürze — sie vermeidet den Umweg über $\sum s_n x^n$ — seinen Grundgedanken noch deutlicher hervortreten läßt und überdies schon mit der schwächeren Voraussetzung der *einseitigen* O-Bedingung für die Koeffizienten a_n der Potenzreihe auskommt; sie ergibt unmittelbar den folgenden zuerst von Hardy und Littlewood[2]) bewiesenen

Satz. *Für* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *sei* a_n *reell und* $n a_n \leqq C$; *für* $x \to 1-0$ *existiere* $\lim \sum a_n x^n = s$. *Dann konvergiert* $\sum a_n = s$.

Beim Beweis genügt es, den Fall $s = 0$, $a_0 = 0$, $a_n \leqq n^{-1}$ $(n > 0)$ zu behandeln; der allgemeine Fall kann durch Änderung von a_0 und a_1 und nachträgliche Division durch eine geeignete Zahl C' darauf zurückgeführt werden.

Der Grundgedanke besteht in der Einführung des Raumes $\mathfrak{F}$ derjenigen für $0 < x < 1$ definierten (reellwertigen) Funktionen $f(x)$, für welche

$$\sum_1^\infty a_n f(x^n) \quad \textit{für} \quad 0 < x < 1 \quad \textit{konvergent} \tag{1}$$

ist und

$$\sum_1^\infty a_n f(x^n) = F(x) \to 0 \quad \textit{für} \quad x \to 1-0 \tag{2}$$

gilt.

Hiermit schreibt sich die erste Voraussetzung des Satzes kurz $x \in \mathfrak{F}$, und die Behauptung läßt sich in der Form

$$\mathfrak{F} \ni f^*(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad 0 \leqq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \textit{für} \quad \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \end{cases} \tag{3}$$

[1]) Math. Zeitschr. 32 (1932), S. 319—320. Gegenstand der Arbeit ist ein allgemeinerer Satz über $\sum s_n x^n$, aus dem der Satz von Littlewood durch elementare, aber nicht ganz kurze Betrachtungen abgeleitet werden kann. Die Durchführung ist zusammenhängend dargestellt bei K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Auflage (Berlin 1947), S. 519—524.

[2]) Proc. London math. Soc. 13 (1913), S. 174—191, Theorem 11.

aussprechen, denn es ist

$$\sum_1^\infty a_n f^*(x^n) = \sum_{2x^n \geqq 1} a_n = \sum_1^N a_n = s_N, \quad N = \left[\frac{\log 2}{|\log x|}\right].$$

Der Funktionenraum $\mathfrak{F}$ enthält mit $f(x)$ offenbar stets auch $f(x^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und mit endlich vielen Funktionen auch jede ihrer Linearverbindungen mit konstanten Koeffizienten. Also gehört wegen $x \in \mathfrak{F}$ jedes durch x teilbare Polynom zu $\mathfrak{F}$. Wir zeigen, daß auch jede durch diese Polynome hinreichend gut approximierbare Funktion mit der Eigenschaft (1) zu $\mathfrak{F}$ gehört:

(4) *Die für $0 < x < 1$ erklärte Funktion $f(x)$ erfülle die Bedingung* (1); *zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es zwei durch x teilbare Polynome p_1, p_2, für die*

$$p_1(x) \leqq f(x) \leqq p_2(x) \qquad (0 < x < 1)$$

gilt und

$$\frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} = q(x) \quad \textit{ein Polynom mit} \quad \int_0^1 q(x)\,dx < \varepsilon$$

ist. Dann gilt auch (2), *d. h. es ist $f \in \mathfrak{F}$.*

Zum Beweis wählen wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Polynome p_1, p_2 gemäß (4). Dann gilt für die in (2) erklärte Funktion $F(x)$:

$$F(x) - \sum_1^\infty a_n p_1(x^n) = \sum_1^\infty a_n (f(x^n) - p_1(x^n)) \leqq \sum_1^\infty \frac{1}{n}(p_2(x^n) - p_1(x^n))$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{n}(1 - x^n)\, x^n\, q(x^n) \leqq \sum_1^\infty (1-x)\, x^n\, q(x^n) = \sum_{n=1}^\infty (1-x)\, x^n \sum_{\varrho=0}^r b_\varrho\, x^{n\varrho}$$

$$= \sum_{\varrho=0}^r b_\varrho \frac{(1-x)x^{\varrho+1}}{1-x^{\varrho+1}} \xrightarrow[x \to 1-0]{} \sum_{\varrho=0}^r \frac{b_\varrho}{\varrho+1} = \int_0^1 q(x)\,dx < \varepsilon.$$

Wegen $p_1 \in \mathfrak{F}$ gilt $\sum a_n p_1(x^n) \to 0$, also $F(x) < \varepsilon$ für $x > 1 - \delta$. Durch Betrachtung von $p_2 - f$ an Stelle von $f - p_1$ ergibt sich das Gleiche für $-F(x)$, also gilt $F(x) \to 0$. Damit ist (4) bewiesen. Wir wenden uns der Behauptung (3) zu.

f^* erfüllt die Forderung (1), da die Summe abbricht. Ferner läßt sich f^* im Sinne von (4) durch Polynome approximieren, indem man zunächst die für $0 \leqq x \leqq 1$ stückweise stetige Funktion $(f^*(x) - x)/x(1-x)$ zwischen zwei Polynome q_1, q_2 mit $\int (q_2 - q_1)\,dx < \varepsilon$ einschließt (was auf Grund des Weierstrassschen Approximationssatzes möglich ist) und dann $p_i(x) = x + x(1-x)\,q_i(x)$ setzt. Nach (4) ist $f^* \in \mathfrak{F}$. Damit ist der Beweis beendet.

(Eingegangen am 1. Mai 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 208—218 (1952).

Natürliche Geometrie der Kurvenkongruenzen.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

Frank Löbell in München.

Die folgenden Seiten enthalten eine differentialgeometrische Behandlung der Kongruenzen reeller Kurven im dreidimensionalen Euklidischen Raum, die sich systematisch der Methode des beweglichen Begleitkörpers bedient. Alle für das betrachtete Gebilde charakteristischen Begriffe ergeben sich nach diesem Verfahren auf die natürlichste Weise, weil es unmittelbar zu vollständigen Systemen von Differentialinvarianten führt; zudem haben diese von vornherein höchst anschauliche Bedeutungen.

1. Die zu untersuchende *Kurvenkongruenz* sei so beschaffen, daß durch jeden Punkt P eines gewissen räumlichen Gebietes genau eine ihrer Kurven geht; sie besitze alle sich als erforderlich herausstellenden Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften. In jedem Punkt P bestimmt dann die durch ihn laufende Kurve, die wir als gerichtet voraussetzen, einen sie dort berührenden Einheitsvektor $\mathfrak{e}$[1]).

[1]) A. Voss betrachtet in seiner Arbeit „Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme", Math. Ann. 23 (1884), S. 45—81, im Grunde genommen die gleichen Gebilde, wenn er jedem Punkte des Raumes eine durch ihn gehende Ebene als zugeordnet annimmt: die Normalebene zu $\mathfrak{e}$ durch P.

R. v. Lilienthal behandelt in seinen Arbeiten „Über die Krümmung der Kurvenscharen", Math. Ann. 32 (1888), S. 545—565, und „Zur Krümmungstheorie der Kurvenscharen", Math. Ann. 38 (1891), S. 429—451, zweifach unendliche Mannigfaltigkeiten, d. h. nach unserem heutigen Sprachgebrauch Kongruenzen von Kurven.

P. Delens verwendet in einer großen Arbeit „Géométrie des congruences de courbes", Rend. Palermo 56 (1932), p. 289—351, in der er Untersuchungen von C. E. Weatherburn weiterführt, schon die méthode du repère mobile; sein Verfahren ist aber in den Grundlagen der Vereinfachung fähig, wie die vorliegende kleine Arbeit zu zeigen versucht.

F. Emde untersucht in seinem Buch „Quirlende elektrische Felder" (Braunschweig 1949) Felder von Einheitsvektoren, die unter geeigneten Voraussetzungen Kongruenzen von „Feldlinien" definieren.

2. Denken wir uns einen zu einer Schar von Kongruenzkurven senkrechten Flächenstreifen! In jedem Punkt P seiner Mittellinie m ist durch den von ihm ausgehenden Vektor $\mathfrak{e}$ und den Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ der Tangente von m ein starrer Körper definiert, der „*Begleitkörper* der Kongruenz für das Linienelement $(P, \mathfrak{a})$". Verschieben wir diesen an m entlang so, daß sein Scheitel P die Geschwindigkeit $\mathfrak{a}$ hat, die Zeit also durch die Bogenlänge s von m gemessen wird, so gibt es nach einem Satz der Kinematik an jeder Stelle P einen momentanen *Drehvektor* $\mathfrak{d}$, mittels dessen sich die Änderungsgeschwindigkeit eines beliebigen, mit dem Körper fest verbundenen Vektors $\mathfrak{q}$ in der Form ausdrückt:

$$\frac{d\mathfrak{q}}{ds} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{q}. \tag{1}$$

Dies ist die *Grundformel*, die die „Ableitungsgleichungen" der Theorie umfaßt; diese gehen aus ihr hervor, wenn man für $\mathfrak{q}$ die „Grundvektoren" $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{e} \times \mathfrak{a}$ des Begleitkörpers oder „begleitenden Dreibeins" $(\mathfrak{e}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ einsetzt.

3. Die zu $\mathfrak{e}$ normale Komponente des Drehvektors,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{e} \times \mathfrak{d} \times \mathfrak{e}, \tag{2}$$

ist für die Gestaltsverhältnisse der Kongruenz in der Umgebung der Stelle P in bezug auf die Richtung $\mathfrak{a}$ maßgebend; denn $\mathfrak{g}$ ist durch die räumliche Ortsfunktion $\mathfrak{e}$ und ihre geometrische Ableitung in der Richtung $\mathfrak{a}$ bestimmt, da die Grundformel (1) mit $\mathfrak{q} = \mathfrak{e}$ für $\mathfrak{g}$ den Ausdruck

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{e} \times \frac{d\mathfrak{e}}{ds} \tag{3}$$

ergibt. $\mathfrak{g}$ kennzeichnet nach Größe und Richtung die Geschwindigkeit, mit der der Vektor $\mathfrak{e}$ sich beim Fortschreiten von P mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{a}$ neigt, und heiße deshalb der *Neigungsvektor* der Kongruenz für das Linienelement $(P, \mathfrak{a})$.

Naturgemäß kommt es hauptsächlich auf die relative Lage von $\mathfrak{g}$ zum Begleitkörper an; diese wird durch die Größen der Komponenten von $\mathfrak{d}$ in den Richtungen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ festgelegt, die „*Schränkung*" a und die „*Spreizung*" b der Kongruenz für das Element $(P, \mathfrak{a})$[2]: es ist

$$\mathfrak{g} = a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b}. \tag{4a}$$

[2]) Mit dem Begriff der Spreizung, aber unter dem Namen „Normalkrümmung" beschäftigte sich schon A. Voss, a. a. O., S. 70, und R. v. Lilienthal, a. a. O., S. 553 ff. Beide Begriffe kommen dann bei C. E Weatherburn vor; s. P. Delens l. c. p. 303. Das Wort „Spreizung" gebraucht F. Emde a. a. O., S. 101, wo gleichzeitig der Begriff der Schränkung unter der Bezeichnung „Drillung" eingeführt wird, die wir jedoch in einer etwas anderen, und zwar der üblichen Bedeutung benützen wollen. Der Ausdruck „Schränkung" wurde in einem engeren Sinn bei der Untersuchung von Regelflächen von F. Buka 1881 eingeführt, Z. f. Math. u. Phys. 21, S. 16.

In manchen Fällen ist es günstiger, zur Festlegung von $\mathfrak{g}$ im Begleitkörper Polarkoordinaten g und γ zu verwenden, so daß

$$\mathfrak{g} = g(\mathfrak{a}\cos\gamma + \mathfrak{b}\sin\gamma) \tag{4b}$$

wird. Den Skalar g, der nach (3) die Größe von $\frac{d\mathfrak{e}}{ds}$ angibt, nennen wir die *Neigung*, den Winkel

$$\delta = \gamma - \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

zwischen $\mathfrak{a}$ und $\frac{d\mathfrak{e}}{ds}$ die *Schwenkung* der Kongruenz für das Linienelement $(P, \mathfrak{a})$.

Zwischen den eingeführten „Neigungsgrößen" gelten die Beziehungen:

$$a = -g\sin\delta, \quad b = g\cos\delta, \quad g^2 = a^2 + b^2, \quad \operatorname{tg}\delta = -a:b. \tag{4c}$$

4. Die Koordinate von $\mathfrak{d}$ in der Richtung $\mathfrak{e}$, die „Rundung" c des Orthogonalstreifens der Kongruenz[3]), ist durch die Änderung der Richtung $\mathfrak{a}$ beim Fortschreiten des Begleitkörpers längs der Streifenachse m bestimmt; aus der Grundformel (1) ergibt sich mit $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}$ wegen $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} + c\mathfrak{e}$ der bekannte Ausdruck[4]) $c = \mathfrak{e}\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{a}}{ds}$.

Besonders interessant sind die orthogonalen „Bänder" der Kongruenz, die durch das Verschwinden von c gekennzeichnet sind[5]); sie sind durch die Angabe eines ihrer Linienelemente eindeutig bestimmt.

5. Wie hängen die *Neigungsgrößen* a und b, die zu den verschiedenen, von einen Punkt P ausstrahlenden Normalenrichtungen $\mathfrak{a}$ der Kongruenz gehören, untereinander zusammen?

Es seien $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{e} \times \mathfrak{a}_1$ zwei zueinander senkrechte unter den Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, so daß $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{e}$ ist. Bezeichnet φ den Winkel zwischen $\mathfrak{a}_1$ und einem beliebigen der Vektoren $\mathfrak{a}$, den „Richtungswinkel" von $\mathfrak{a}$, so ist

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\cos\varphi + \mathfrak{a}_2\sin\varphi. \tag{6}$$

[3]) Zur Benennung der Krümmungsgrößen eines Streifens vergleiche man Jahresber. d. D. Math.-Ver. 53, 1943, 2. Abt., S. 33. Die „Koordinate" ist der Zahlenwert der „Komponente".

[4]) Diesen Ausdruck stellte, natürlich in anderer Schreibweise, C. F. Gauss schon vor 1825 (Werke VIII, S. 390 unten) für die „Seitenkrümmung" auf, die später O. Bonnet „geodätische Krümmung" nannte.

[5]) Auf sie weist R. v. Lilienthal hin a. a. O., S. 555. Als Band bezeichnete S. Finsterwalder einen Streifen mit verschwindender geodätischer Krümmung oder Rundung.

Diese Beziehung kann nur das Ergebnis der Anwendung der Operation

$$\frac{d}{ds} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial s_1} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial s_2} \tag{7}$$

auf den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ der Punkte einer Fläche sein, die durch den Punkt P geht und in diesem die Normale $\mathfrak{e}$ besitzt. Der Operator (7) ist auf jede Ortsfunktion auf dieser Fläche in der Umgebung von P anwendbar[6]; eine solche ist der Vektor $\mathfrak{e}$, so daß

$$\frac{d\mathfrak{e}}{ds} = \cos\varphi \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial s_1} + \sin\varphi \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial s_2} \tag{8}$$

wird, woraus nach (3) folgt:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \cos\varphi + \mathfrak{g}_2 \sin\varphi. \tag{9}$$

Hierin spricht sich das „Verteilungsgesetz" des Neigungsvektors $\mathfrak{g}$ als Funktion des Linienelementes $(P, \mathfrak{a})$ aus; er ist, wie man sieht, in jedem Punkt P eine *lineare Vektorfunktion* von $\mathfrak{a}$.

Für die Schränkung und die Spreizung, für die nach (4a) und (3)

$$a = \mathfrak{g}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{e}\frac{d\mathfrak{e}}{ds}, \quad b = \mathfrak{g}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{e}}{ds} \tag{10}$$

gilt, ergeben sich aus (9), da nach (6)

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2 = -\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{a}_2 = \cos\varphi, \ \mathfrak{a}\mathfrak{a}_2 = -\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 = -\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{a}_1 = \sin\varphi$$

ist, quadratische Formen in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ mit Koeffizienten, die sich in einfacher Weise aus a_1, a_2, b_1, b_2 zusammensetzen[7].

6. Die *Affinität* $\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$ oder, anschaulicher ausgedrückt, die *Ellipse* mit dem Mittelpunkt P und den Halbmessern $\mathfrak{g}$ in Verbindung mit dem Gesetz der Zuordnung ihrer Punkte zu denen des Einheitskreises um P mit den Radien $\mathfrak{a}$ bringt die Zusammenhänge zwischen den Neigungsgrößen der Kongruenz in einem ihrer Punkte P vollständig zum Ausdruck; wir wollen dies im einzelnen genauer betrachten:

---

[6]) Selbstverständlich müssen überall die nötigen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gemacht werden.

Es sei betont, daß $\mathfrak{e}$ im allgemeinen außer in P *nicht* zur Fläche normal ist.

Mit dem Index i versehene Buchstaben bezeichnen im folgenden Größen, die der Richtung $\mathfrak{a}_i$ zugeordnet sind.

[7]) S. F. Emde a. a. O., S. 102. Ähnliche Ausdrücke werden auf die gleiche Weise wie im obigen Text im Jahresber. d. D. Math.-Ver. 39, 1930, auf S. 180 abgeleitet; vgl. auch M. Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung (Leipzig 1928), S. 93.

Die Ellipse der Vektoren $\mathfrak{g}$ besitzt, wenn sie nicht speziell ein Kreis ist, zwei Hauptachsen. Die in sie fallenden Neigungsvektoren $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ haben extreme Längen g' und g''; wir nennen sie die *Hauptneigungen* der Kongruenz an der Stelle P. Die Vektoren $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{e} \times \mathfrak{a}'$, denen sie entsprechen, geben die „*Hauptneigungsrichtungen*" der Kongruenz in P an; sie sind stets reell und aufeinander senkrecht. Diese Richtungen, die im allgemeinen nicht mit denen der Hauptachsen unserer $\mathfrak{g}$-Ellipse zusammenfallen, bilden bez. mit $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ Winkel, die bei geeigneter Festsetzung der Vorzeichen der Hauptneigungen g' und g'' als einander gleich angenommen werden können; wir bezeichnen ihren gemeinsamen Wert mit $\frac{\pi}{2} + \delta_0$ und nennen δ_0 die *mittlere Schwenkung* der Kongruenz an der betrachteten Stelle. — Ist die $\mathfrak{g}$-Ellipse ein Kreis, der dem $\mathfrak{a}$-Kreis mit gleichem Umlaufsinn entspricht, so hat die Kongruenz in P für alle Richtungen $\mathfrak{a}$ gleiche Schwenkungen $\delta = \delta_0$ (vgl. (4 b) in Abschnitt 3), daher nach (4 a) auch gleiche Schränkungen und gleiche Spreizungen; findet das Entsprechen der beiden Kreise mit entgegengesetzten Umlaufrichtungen statt, so verliert der Begriff der mittleren Schwenkung seinen Sinn.

7. Die *Ellipse* der Vektoren $\mathfrak{g}$ besitzt bekanntlich zwei *Invarianten*, nämlich den Vektor $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 = g_1 g_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta_2 - \delta_1\right)\mathfrak{e}$ oder, da nach unserer Vorzeichenfestsetzung $\delta'' - \delta' = 0$ wird,

$$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 = g' g'' \mathfrak{e} \tag{11}$$

und den Skalar

$$\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 = \mathfrak{g}'^2 + \mathfrak{g}''^2, \tag{12}$$

wie sich mit Hilfe von (9) verifizieren läßt, da wegen $\mathfrak{e} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{a}$ der zur Richtung $\mathfrak{b}$ gehörende Neigungsvektor $-\mathfrak{g}_1 \sin\varphi + \mathfrak{g}_2 \cos\varphi$ wird.

Die skalare Ortsfunktion im Raum

$$N = \mathfrak{e}\,\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 \tag{11'}$$

heiße das *Neigungsmaß* der Kongruenz in P: wie wir aus (11) ersehen, ist es gleich dem Produkt der beiden Hauptneigungen:

$$N = g' g''. \tag{11''}$$

Je nachdem $N \gtrless 0$ ist, entsprechen sich der $\mathfrak{a}$-Kreis und die $\mathfrak{g}$-Ellipse mit gleichen oder mit entgegengesetzten Umlaufsinnen.

Als *Invarianten der Affinität* $\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$ finden wir nach (9) und (6)

$$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{g}_2 \mathfrak{a}_2 = 2A, \tag{13}$$

$$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{g}_2 \mathfrak{a}_1 = 2B; \tag{14}$$

nach (10) und, weil vermöge (4b) und (5)

$\mathfrak{g}'\mathfrak{a}' = -g' \sin\delta_0$, $\mathfrak{g}''\mathfrak{a}' = -g'' \cos\delta_0$, $\mathfrak{g}'\mathfrak{a}'' = g' \cos\delta_0$, $\mathfrak{g}''\mathfrak{a}'' = -g'' \sin\delta_0$

ist, wird

$$A = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2) = -\tfrac{1}{2}(g' + g'') \sin\delta_0, \tag{13'}$$

$$B = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2) = \tfrac{1}{2}(g' + g'') \cos\delta_0. \tag{14'}$$

A ist die *„mittlere Schränkung"*, B die *„mittlere Spreizung"* der Kongruenz an der Stelle P[8]).

Die Größe

$$\operatorname{tg}\delta_0 = -A : B \tag{15}$$

kann als *Schwenkungsmaß* bezeichnet werden; durch seinen Wert wird, wie es sein muß, δ_0 nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von π bestimmt, und je nach dem Wert von δ_0, für den man sich entscheidet, sind die Vorzeichen von g' und g'' zu wählen.

Die besprochenen Invarianten sind *nicht unabhängig* voneinander; es ist nämlich gemäß (4b), (13'), (14') und (11')

$$\mathfrak{g}'^2 + \mathfrak{g}''^2 = a'^2 + b'^2 + a''^2 + b''^2 = 4A^2 + 4B^2 - 2N. \tag{12'}$$

8. Mit Hilfe der eingeführten Größen können übersichtliche *Ausdrücke für die Schränkung und die Spreizung* aufgestellt werden:

Bezeichnen wir mit χ den Richtungswinkel von $\mathfrak{a}$ gegenüber der Hauptneigungsrichtung $\mathfrak{a}'$, so erhalten wir auf Grund von (10), (6), (9), und (4c)[9])

$$a = A + \tfrac{1}{2}(g' - g'') \sin(2\chi - \delta_0), \tag{16}$$

$$b = B + \tfrac{1}{2}(g' - g'') \cos(2\chi - \delta_0). \tag{17}$$

Diese Ausdrücke lassen unmittelbar folgende Tatsachen erkennen: a und b nehmen für vier gleichmäßig verteilte, stets reelle Paare entgegengesetzter Richtungen extreme Werte an; unter der Voraussetzung $g' > g''$ wird

für $\chi = \frac{1}{2}\delta_0 - \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}$: $a = a_{\max} = \bar{a}$ und $b = B$,

„ $\chi = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}$: $a = a_{\min} = \underline{a}$ und $b = B$;

„ $\chi = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$: $b = b_{\max} = \bar{b}$ und $a = A$,

„ $\chi = \frac{1}{2}\delta_0 \pm \frac{\pi}{2}$: $b = b_{\min} = \underline{b}$ und $a = A$.

a und b verschwinden für je zwei Paare entgegengesetzter Richtungen $\mathfrak{a}$, die entweder reell oder imaginär sind und demgemäß auch zusammen-

[8]) S. P. Delens l. c. p. 299; F. Emde führte die Bezeichnungen „mittlere Drillung" und „mittlere Spreizung" ein, a. a. O., S. 103.

[9]) Ähnliche Ausdrücke gibt F. Emde a. a. O., S. 102 (13); den Zusammenhang vermitteln unsere zwischen (14) und (13') stehenden Beziehungen.

fallen können, und zwar wird $b = 0$ für Richtungen, die zur Richtung $\chi = \frac{1}{2}\delta_0$ symmetrisch sind, und $a = 0$ für Richtungen, die zur Richtung $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{\pi}{4}$ symmetrisch liegen. Alle diese Verhältnisse werden durch die Abbildung erläutert, die den $\mathfrak{a}$-Kreis und die $\mathfrak{g}$-Ellipse in ihrer gegenseitigen Lage zeigt, während die ausgezeichneten Werte der Größen a und b der Übersichtlichkeit zuliebe an Richtungen vom Richtungswinkel 2χ angeschrieben sind[10]).

Nach (11′) wird für die Richtungen, für die $a = 0$, $N = b\,b^*$, für die Richtungen, für die $b = 0$, $N = a\,a^*$, wo das Sternchen die Abhängigkeit von der in der Normalebene zu $\mathfrak{e}$ um $+\frac{\pi}{2}$ gedrehten Richtung $\mathfrak{e} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^*$ bezeichnet.

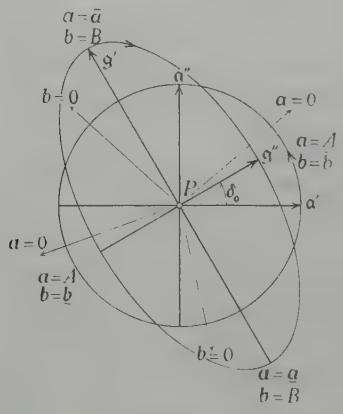

Fig. 1.

Da die Extremwerte von a und die von b je Paaren aufeinander senkrechter Richtungen zugeordnet sind, so wird, wenn der Richtungswinkel von $\mathfrak{a}$ in bezug auf ein solches Paar mit α bzw. β bezeichnet wird, so daß $\alpha + \frac{\pi}{4} = \beta = \chi - \frac{1}{2}\delta_0$ ist,

$$(16') \qquad a = \bar{a}\cdot\cos^2\alpha + \underline{a}\cdot\sin^2\alpha,$$

$$(17') \qquad b = \bar{b}\cdot\cos^2\beta + \underline{b}\cdot\sin^2\beta;$$

denn a und b sind nach der Schlußbemerkung von Abschnitt 5 quadratische Formen in $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ bzw. $\cos\beta$, $\sin\beta$, die nur die angegebene Gestalt haben können, wenn sie für verschwindende cos- und sin-Werte extreme Größen annehmen sollen. Ferner wird nach (16) und (17)

$$(16'') \qquad a = A + \tfrac{1}{2}(g' - g'')\sin 2\beta,$$

$$(17'') \qquad b = B - \tfrac{1}{2}(g' - g'')\sin 2\alpha.$$

Hiernach wird wegen (12′)

$$\bar{a}\cdot\underline{a} = N - B^2, \quad \bar{b}\cdot\underline{b} = N - A^2;$$

diese beiden Skalare könnte man als Schränkungsmaß und Spreizungsmaß der Kongruenz bezeichnen[11]).

[10]) Die Werteverteilung der Funktionen a und b um einen Punkt zeigt F. Emde a. a. O. auf S. 108 in einer schönen Figur.

[11]) Manchmal sind die folgenden Beziehungen wertvoll, die man durch partielle Ableitung von (9), (16) und (17) nach dem Richtungswinkel erhält und in denen das Sternchen den zum Linienelement $(P.\,\mathfrak{e} \times \mathfrak{a})$ gehörenden Funktionswert kennzeichnet:

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \varphi} = \mathfrak{g}^*, \quad g\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \mathfrak{g}\mathfrak{g}^*, \quad \frac{\partial a}{\partial \varphi} = 2(b - B) = b - b^*, \quad \frac{\partial b}{\partial \varphi} = 2(A - a) = a^* - a.$$

9. Betrachten wir nun die *Bewegung des Begleitkörpers* (e, a, b) *längs eines von Kongruenzkurven gebildeten Flächenstreifens* durch den Punkt P! Während in bekannter Weise aus der *Krümmung* k der Kongruenzlinie die Normalkrümmung des Streifens zu $k\cos\vartheta$ und seine Seitenkrümmung zu $k\sin\vartheta$ berechnet werden kann, wo ϑ im Falle $k \neq 0$ den Winkel der negativen Streifennormalen $-\mathfrak{b}$ mit der Hauptnormalen $\mathfrak{h}$ der Streifenachse bedeutet[12]), ist auf Grund einer bekannten Tatsache der Flächentheorie die Normalwindung des Streifens, die „*Drillung*" *der Kongruenz für das Linienelement* $(P, \mathfrak{a})$, *ihrer Schränkung* a für dieses Element *entgegengesetzt gleich*[13]).

Diese Bemerkung erlaubt es, die Schränkung mit dem Winkel ϑ und der *Windung* w der Kongruenzlinie in Beziehung zu setzen; ein bekannter Satz der Streifentheorie besagt nämlich, daß, wenn t die Bogenlänge der Kongruenzkurve ist, gilt[14]):

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = a + w. \tag{18}$$

10. Die wesentlichen allgemeinen Einsichten der Differentialgeometrie entspringen aus Integrabilitätsbedingungen. So ergeben sich durch Anwendung einer solchen auf den Ortsvektor einer Fläche außer dem im vorigen Abschnitt herangezogenen Bertrand-Bonnetschen Gesetz Ausdrücke für die *Seitenkrümmungen* der auf der Fläche zu Grunde gelegten Netzlinien. Da diese für eine den betrachteten Kongruenzstreifen enthaltende Fläche und das auf ihr liegende Netz der Kongruenzlinien

[12]) Der erste dieser Werte ergibt sich aus der Formel von Meusnier, der zweite aus einer Beziehung, die gelegentlich nach Catalan benannt wird, aber schon von Gauss und Minding benutzt wurde.

[13]) Damit kommt die von F. Emde benützte Bezeichnung zur Geltung (vgl. Fußnote [2]) und [3]) dieser Arbeit).

Der Satz, daß die Normalwindungen zweier sich senkrecht schneidender Flächenkurven in ihrem Schnittpunkt verschwindende Summe haben, stammt von J. Bertrand, Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. IX (1844), p. 134—137, und O. Bonnet, Journal de l'Ecole Polytechnique, t. XVIII, 32e cahier (1845), p. 1—4.

[14]) O. Bonnet, l. c. p. 13—17.

Wenn statt ϑ die Variable $\tau = tg\,\vartheta$, ferner mit Hilfe des in Abschnitt 5 erwähnten Ausdrucks für a, in dem nur q durch ϑ zu ersetzen ist, die Schränkungen a_1, a_2 und die Spreizungen b_1, b_2 für die Richtungen der Hauptnormalen und der Binormalen der Kongruenzlinie eingeführt werden, so erhält man für die Funktion $\tau(t)$ längs einer Kongruenzkurve die Riccatische Differentialgleichung:

$$\frac{d\tau}{dt} = (a_1 + w)\tau^2 + (b_1 - b_2)\tau + a_2 + w.$$

Eine Folge hiervon ist der bekannte Satz, daß vier koaxiale Kongruenzstreifen mit jeder Ebene vier Linienelemente gleichen Doppelverhältnisses gemein haben. Vgl. G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, II (Paris 1915), p. 4.

und ihrer orthogonalen Trajektorien die Werte

$k \sin \vartheta$ für die Linie mit der Tangentenrichtung $\mathfrak{e}$,

b „ „ „ „ „ „ „ $\mathfrak{a}$

haben, so genügen sie der Beziehung [15])

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t} + k \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial t} + b \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \tag{19}$$

in der F eine willkürliche Ortsfunktion auf der Fläche bedeutet.

Die auf einen beliebigen, mit einem geeigneten Begleitkörper der Fläche fest verbundenen Vektor angewandte Integrabilitätsbedingung ist die Quelle des theorema egregium von Gauss und der Mainardi-Codazzischen Gleichung [16]). Diese Relationen erscheinen, da die Darboux-Cesàroschen Krümmungsvektoren unserer aus Kongruenzkurven gebildeten Fläche für die t- und s-Linien

$$-a\mathfrak{e} + k \cos \vartheta \mathfrak{a} + k \sin \vartheta \mathfrak{b} \quad \text{und} \quad a\mathfrak{a} + c\mathfrak{e} + b\mathfrak{b}$$

sind, wo c die in Abschnitt 4 erläuterte Bedeutung hat, in der einen Vektorgleichung zusammengefaßt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + b\right)(a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + c\mathfrak{e}) - \left(\frac{\partial}{\partial s} - k \sin \vartheta\right)(k \cos \vartheta \mathfrak{a} + k \sin \vartheta \mathfrak{b} - a\mathfrak{e})$$
$$= (k \cos \vartheta \mathfrak{a} + k \sin \vartheta \mathfrak{b} - a\mathfrak{e}) \times (a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + c\mathfrak{e}),$$

mit der die folgenden skalaren Beziehungen gleichwertig sind:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} - \dfrac{\partial (k \cos \vartheta)}{\partial s} + 2ab + ck \sin \vartheta + k^2 \cos \vartheta \sin \vartheta = 0, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} - \dfrac{\partial (k \sin \vartheta)}{\partial s} - a^2 + b^2 - ck \cos \vartheta + k^2 \sin^2 \vartheta = 0, \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} + \dfrac{\partial a}{\partial s} + bc - 2ak \sin \vartheta + bk \cos \vartheta = 0. \end{cases} \tag{20}$$

[15]) S. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 39, 1930, S. 177 (26); nach S. 178 (32) sind, weil $\omega_{12} = \frac{\pi}{2}$ zu setzen ist, die dort mit $-g_2$ und g_1 bezeichneten Größen die Seitenkrümmungen G_1 und G_2 der Netzlinien.

[16]) S. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 39, 1930, S. 178 (37), wo $D\omega_{12} = 0$ zu setzen und bezüglich g_1 und g_2 das in der vorigen Fußnote Gesagte zu berücksichtigen ist. Integrabilitätsbedingungen stellen auch R. v. Lilienthal, a. a. O., S. 438 f., und P. Delens, l. c. p. 315, auf.

Eine Möglichkeit, zu Fundamentalgleichungen zu gelangen, zeigen auch zwei Arbeiten des Verfassers in den Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1951 (2. März) und 1952 (6. Juni).

Dies sind die *Fundamentalgleichungen* der Theorie der Kurvenkongruenzen. Man beachte, daß die Funktionswerte von ϑ hier längs einer Orthogonaltrajektorie der Kongruenzlinien willkürlich angenommen werden dürfen. Die Funktion $-a^2 - ck\cos\vartheta$, die in der mittleren, das theorema egregium aussprechenden Gleichung auftritt, ist das Krümmungsmaß unserer Fläche.

11. Die Theorie der Kurvenkongruenzen umfaßt die *Flächenlehre* — das bedarf wohl kaum der Erwähnung. Wenden wir unsere Theorie auf die Normalenkongruenz einer Fläche oder auch nur auf eine Kongruenz von Kurven an, die die Fläche senkrecht durchsetzen, so erkennen wir aus der Bedeutung von $\mathfrak{d}$ als Krümmungsvektor der Fläche unmittelbar, daß die Schränkung der Kongruenz in die Normalwindung, ihre Spreizung in die Normalkrümmung der Orthogonalfläche übergeht, die mittlere Spreizung aber in die mittlere Krümmung; die mittlere Schränkung jedoch verschwindet nach dem schon mehrfach erwähnten Satz von Bonnet in den Punkten der Fläche. Das identische Verschwinden von A in einem Raumgebiet ist aber nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung dafür, daß die Kurven der Kongruenz in diesem Gebiet orthogonale Flächen besitzen[17]).

In (17′) und (16″) haben wir nach dem Gesagten Verallgemeinerungen der Formeln von Euler[18]) und von Bertrand-Bonnet vor uns, während die Relationen (16′) und (17″) in der Flächentheorie nicht benutzt zu werden pflegen.

Beim ersten Blick auf die Figur wird man die Verhältnisse im Fall der allgemeinen Kongruenz für viel verwickelter halten als in der Lehre von den Flächenkrümmungen. Bei genauerem Zusehen wird man jedoch bemerken, daß sich dieser spezielle Fall nur dadurch auszeichnet, daß die Hauptachsen der $\mathfrak{g}$-Ellipse zu den Hauptneigungsrichtungen bez. senkrecht sind oder, mit anderen Worten, die mittlere Schwenkung $\delta_0 = 0$ ist; auch bei Minimalflächen, für die dieser Begriff sich als sinnlos erwies, besteht die Aussage über die Lage der $\mathfrak{g}$-Ellipse bei geeigneter Festlegung der Hauptrichtungen zu Recht. Daß man so leicht geneigt ist, die Krümmungsverhältnisse in der Umgebung eines Flächenpunktes für einfacher zu halten, als sie in Wirklichkeit sind, rührt daher, daß man einem Teil der dort herrschenden Gesetzmäßigkeiten gewöhnlich überhaupt keine Beachtung schenkt. Die Neigungsverhältnisse in der allgemeinen Theorie der Kurvenkongruenzen zeichnen sich sogar durch ihre Symmetrie bezüglich der Größen a und b aus.

---

[17]) Dies ergibt sich durch den Vergleich mit älteren Bedingungen von A. Voss, a. a. O., S. 48 f. und R. v. Lilienthal, a. a. O., S. 548; F. Emde führt die Gleichung $A = 0$ auf eine bekannte Bedingung der Vektoranalysis zurück, a. a. O., S. 103.

[18]) Auf diese weisen schon A. Voss, a. a. O., S. 70 und R. v. Lilienthal, a. a. O., S. 555 f., hin.

12. Es wäre reizvoll, noch weitere Sonderfälle zu betrachten, so vor allem den der Strahlenkongruenzen, der durch das identische Verschwinden von k gekennzeichnet ist, ferner die Zusammenhänge mit der Lehre von den Flächenabbildungen und schließlich einige interessante Integralsätze der Theorie. All dies möge anderen Gelegenheiten vorbehalten bleiben.

(Eingegangen am 30. April 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 2, S. 219—222 (1952).

Ein Satz über die Abschnitte einer Potenzreihe.

Herrn Konrad Knopp zum 70. Geburtstag am 22. Juli 1952 gewidmet.

Von

J. Karamata in Genf.

Sei

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu x^\nu \tag{A}$$

konvergent für $|x|<1$, dann stellt für $x \to 1$ nicht nur der Ausdruck (A), sondern auch jeder Abschnitt dieser Reihe

$$f_N(x) = \sum_{\nu \leqq N} u_\nu x^\nu \tag{A_N}$$

mit

$$N = N(x) \to \infty \qquad (x \to 1)$$

ein reguläres Summierungsverfahren der Reihe $\sum u_\nu$ dar.

Das A_N-Verfahren ist ersichtlich um so schwächer, je langsamer $N(x)$ gegen Unendlich strebt, und wird schon konvergenzgleich für

$$N(x) = \lg t / \lg x \tag{1}$$

(t eine passende Konstante). Es gilt in der Tat der

Satz 1. *Ist* $\frac{1}{2} < t < 1$, *so folgt aus*

$$f_N(x) = \sum_{x^\nu \geqq t} u_\nu x^\nu \to s \qquad (x \to 1) \tag{1'}$$

auch

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \to s \qquad (n \to \infty) \tag{2}$$

und umgekehrt.

Dies ist ein Satz Mercerscher Art (vgl. H. R. Pitt, Mercerian theorems, Proc. Cambridge Phil. Soc. **34** (1938), S. 510—520). Er kann aus einem allgemeineren Ergebnis von Pitt abgeleitet werden, ist aber, wie im folgenden gezeigt werden soll, auch elementar beweisbar. Sei

$$t = e^{-a}, \quad x = e^{-1/y}, \quad s(y) = \sum_{\nu \leqq a y} u_\nu$$

und

$$F(y) = e^a f_N(x) = e^a \sum_{\nu \leqq a y} u_\nu e^{-\nu/y} \tag{3}$$

gesetzt; dann ist

$$s(y) = F(y) - \frac{a e^a}{y} \int_0^y e^{-a\eta/y} s(\eta)\, d\eta. \tag{3'}$$

Daraus folgt durch Iteration

$$s(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu F_\nu(y),$$

wobei

$$F_0(y) = F(y), \quad F_{\nu+1}(y) = \frac{a\,e^a}{y} \int_0^y e^{-a\eta/y} F_\nu(\eta)\, d\eta \tag{4}$$

ist. Die Reihe konvergiert wegen (1′) absolut und gleichmäßig in y, solange $e^{-a} = t > \frac{1}{2}$ bleibt, da

$$|F_\nu(y)| < C(e^a - 1)^\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist, was wegen (4) aus (1′) und (3), d. h. aus $|F(y)| < C$ folgt. Somit ist

$$\lim_{y\to\infty} s(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \lim_{y\to\infty} F_\nu(y)$$

vorhanden und es gilt

$$s(y) \to \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s\, e^a (e^a - 1)^\nu = s \qquad (y \to \infty),$$

was mit (2) gleichbedeutend ist. Daß umgekehrt aus (2) auch (1′) folgt, entnimmt man der Gleichung (3′). Damit ist Satz 1 bewiesen.

Wird abweichend von (1)

$$N = N(x) = \frac{\lg t}{\lg x} + (1-p)\,\frac{\lg\lg\dfrac{1}{x}}{\lg x}, \quad 0 < p < 1, \tag{5}$$

genommen, so ist das so gebildete A_N-Verfahren niemals konvergenzgleich. Es ist um so stärker, je kleiner p ist, und bleibt schwächer als das A-Verfahren selbst. *Die beiden Verfahren werden aber äquivalent, wenn zusätzlich noch*

$$n^p |u_n| < M \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

vorausgesetzt wird. In der Tat ist wegen (6) und (5)

$$|f(x) - f_N(x)| < M \sum_{\nu>N} x^\nu/\nu^p < M \left\{ \int_N^\infty x^\xi \xi^{-p}\, d\xi + \frac{x^{[N]}}{[N]^p} \right\} =$$

$$< M(-\lg x)^{p-1} \int_{-N\lg x}^{\infty} e^{-\zeta} \zeta^{-p}\, d\zeta + o(1) =$$

$$< \frac{Mt}{(1-p)^p} (-\lg\lg 1/x)^{-p} + o(1);$$

also ist

$$f_N(x) = f(x) + o(1) \qquad (x \to 1). \tag{7}$$

Für $p = 0$ und $p = 1$ versagt diese Schlußweise. Im ersten Fall erhält man nur

$$|f(x) - f_N(x)| < M t \frac{-\lg x}{1-x},$$

so daß (7) aus (6) mit $p = 0$, d. h. aus

$$u_n = O(1) \qquad (n \to \infty)$$

nur dann unmittelbar gefolgert werden kann, wenn in (5) noch vorausgesetzt wird, daß

$$t = t(x) \to 0 \qquad (x \to 1).$$

Ob (7) aber auch noch für ein konstant bleibendes t gilt, konnte ich nicht entscheiden, ebenso wie bei dem allgemeineren Fall, bei welchem

$$N(x) = \frac{1}{\lg x}\{\lg t + (1-p)\lg\lg 1/x - p\lg(-\lg\lg 1/x)\}$$

genommen und (6) mit $0 \leqq p < 1$ vorausgesetzt wird (außer wenn (6) durch $u_n = o(n^{-p})$ ersetzt wird).

Ist hingegen $p = 1$, so bleibt (7) richtig: es gilt der

Satz 2. *Ist die Reihe* $\sum u_\nu$ *A-summierbar, d. h.*

$$f(x) \to s \qquad (x \to 1), \tag{8}$$

und ist (6) *für* $p = 1$ *erfüllt, d. h.*

$$u_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty), \tag{9}$$

dann ist (1′) *mit* (1) *erfüllt, d. h. die Reihe* $\sum u_\nu$ *ist auch* A_N*-summierbar.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des Littlewoodschen Satzes, nach welchem aus (8) und (9) sogar die Konvergenz der Reihe $\sum u_\nu$ folgt. Man kann diesen Satz aber auch direkt beweisen, was wegen Satz 1 einen weiteren Beweis des Littlewoodschen Satzes liefert. Sei nämlich

$$g_x(t) = f(x) - f_N(x) = \sum_{\nu > \frac{\lg t}{\lg x}} u_\nu x^\nu, \quad g_x(0) = 0, \tag{10}$$

gesetzt; dann ist wegen (9) für $0 \leqq t' < t < 1$

$$|g_x(t) - g_x(t')| < M \sum_{\tau < \nu \leqq \tau'} \frac{x^\nu}{\nu} \qquad \left(\tau = \frac{\lg t}{\lg x},\ \tau' = \frac{\lg t'}{\lg x}\right)$$

$$< M\left\{\frac{x^{[\tau]+1}}{[\tau]+1} + \int_\tau^{\tau'} x^\zeta \frac{d\zeta}{\zeta}\right\} < M\left\{\frac{xt}{1+\tau} + \int_{\tau'}^{\tau} \frac{d\zeta}{-\lg\zeta}\right\} < M\left\{\frac{xt}{1+\tau} + \lg\frac{1-t'}{1-t}\right\}.$$

Also ist ($t' = 0$)

$$|g_x(t)| < M\left\{1 + \lg \frac{1}{1-t}\right\} \tag{11}$$

und für $0 \leqq t' < t < 1$

$$\limsup_{x \to 1} |g_x(t) - g_x(t')| \leqq M \lg \frac{1-t'}{1-t}. \tag{12}$$

Außerdem ist für $\lambda > 1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu x^{\lambda\nu} = \int_0^1 t^{\lambda-1}\, d\{g_x(t)\} = g_x(1) - (\lambda - 1) \int_0^1 t^{\lambda-2} g_x(t)\, dt,$$

d. h.

$$f(x) - f(x^\lambda) = (\lambda - 1) \int_0^1 t^{\lambda-2} g_x(t)\, dt. \tag{13}$$

Man kann nun wegen (11) und (12) aus jeder Folge

$$g_{x_\nu}(t) \qquad (x_\nu \to 1)$$

eine Teilfolge herausgreifen, welche gegen eine für $0 \leqq t < 1$ stetige und integrierbare Funktion $g(t)$ konvergiert. Aus (8) und (13) folgt aber wegen (11), daß dann für jedes $\lambda > 1$

$$\int_0^1 t^{\lambda-2} g(t)\, dt = 0$$

ist. Also muß jede Grenzfunktion $g(t) = 0$ sein, so daß, für $0 \leqq t < 1$,

$$g_x(t) \to 0 \qquad (x \to 1)$$

gilt; hieraus folgt wegen (10) die Behauptung von Satz 2.

(Eingegangen am 5. Juni 1952.)

Grundlagen der Aeromechanik und Flugmechanik.

Von Dr.-Ing. **Arthur Pröll**, Professor i. R. an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 278 Textabbildungen. XVI, 612 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 48.—

Das Buch führt in die Prinzipien der Aerodynamik und deren wichtigste praktische Anwendung, die Flugmechanik, ein, die als zeitlos gelten können, berücksichtigt dabei aber auch die moderne Entwicklung des ganzen Fachgebietes. Ausgehend von der allgemeinen Strömungslehre, deren Kenntnis heute auf sehr vielen Gebieten der Technik vordringlich geworden ist, wird die spezielle Aerodynamik des Fluges ausführlich behandelt. Der zweite Teil bringt Theorie und praktische Anwendung der eigentlichen Flugmechanik, wie sie vor allem der flugtechnische Ingenieur als Grundlage für seine Arbeit braucht.

Grundlagen der Atomphysik.

Eine Einführung in das Studium der Wellenmechanik und Quantenstatistik. Von Dr. phil. **Hans Adolf Bauer**, Professor an der Technischen Hochschule und der Universität in Wien. Vierte, umgearbeitete und bedeutend erweiterte Auflage. Mit 244 Textabbildungen. XX, 631 Seiten. 1951.

Ganzleinen DM 45.—

Aus den Besprechungen:

. . . Die letzte Auflage stellt gegenüber der dritten eine außerordentliche Erweiterung dar, was sich auch äußerlich in der Verdoppelung des bisherigen Seitenumfanges kundtut. Den bisherigen drei Teilen des Werkes: Teilchenstruktur der Materie, Wellenstruktur der Materie und Wellen-(Quanten-) Mechanik wurden in der vierten Auflage noch die Teile: Schrödingersche Störungstheorie, Diracsche Theorie und die Quantenstatistik hinzugefügt. Trotz der durch diese Vertiefung der theoretischen Grundlagen der Atomphysik bedingten erhöhten Schwierigkeiten der allgemeinen Verständlichkeit ist es dem Verfasser in ganz ausgezeichneter Weise gelungen, eine möglichst leicht lesbare und wirklich lückenlose Darstellung zu geben. Welches Kapitel man immer aufschlägt, immer gelingt es dem Verfasser in seiner außerordentlichen pädagogischen Geschicklichkeit systematisch den Leser auch durch die schwierigsten mathematisch-theoretischen Auseinandersetzungen zu geleiten. Die mit großer Einfühlung und enormer Sachkenntnis gewählten Abbildungen tragen sehr zur Verständlichmachung bei und verbinden in glücklicher Weise experimentelle Ergebnisse und Theorie. Die Anordnung des Textes ist vorbildlich klar und ermöglicht ein sehr rasches Zurechtfinden. Durch gewissenhafte Berücksichtigung der neuesten Literatur, der letzten atomphysikalischen Konstanten und Zahlenwerte geht das Buch weit über eine Einführung in die Wellenmechanik und Quantenstatistik hinaus und wird damit zum Nachschlagwerk. „Natur und Technik"

Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen.

Von Professor Dr. **P. Gombás**, Direktor des physikalischen Instituts der Universität für technische Wissenschaften in Budapest. Mit 59 Textabbildungen. VIII, 406 Seiten. 1949. DM 58.50; Ganzleinen DM 60.—

Aus den Besprechungen:

. . . In dem Buch werden quantenmechanische Kenntnisse nicht vorausgesetzt; die mathematischen Anforderungen sind gering. Im ersten Teil werden das Modell von Thomas und Fermi sowie seine Korrektionen und Erweiterungen behandelt, der zweite Teil geht auf die Anwendungen für Atome, Moleküle, Kristalle und Materie unter hohem Druck ein. Im Anhang werden Tabellen mit Lösungen der Thomas-Fermischen und der Thomas-Fermi-Diracschen Gleichung gegeben. Das Buch ist für den auf dem Gebiet der Atomphysik tätigen Physiker von Bedeutung als zusammenfassende Darstellung mit vollständigen Literaturangaben und ist wegen der klaren und verständlichen Darstellung auch zur Einführung in die statistische Theorie des Atoms geeignet. „Zentralblatt für Mathematik"

. . . The author has succeeded admirably in presenting the subject matter in such a way that ‚the experimental physicist, the technician, or chemist can become familiar with it with the minimum of effort'. „The Institute of Metals"

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Aus

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

Herausgegeben von **R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.**

In Kürze erscheinen:

LXII BAND: **Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen.** Von Dr. **Robert Sauer,** o. Professor für Mathematik und analytische Mechanik an der Technischen Hochschule München. Mit 63 Abbildungen. XIV, 226 Seiten. 1952. DM 26.—; Ganzleinen DM 29.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — **I. Gegenüberstellung von Anfangswert- und Randwertproblemen:** DIRICHLETsches Randwertproblem der Potentialgleichung. Anfangswertproblem der Wellengleichung. Hyperbolische, elliptische und parabolische Differentialgleichungen. Analytische Lösungen analytischer Differentialgleichungen. Anfangs- und Randwertaufgaben bei Differenzengleichungen. Hyperbolische Differentialgleichungen in der Gasdynamik und Akustik. — **II. Differentialgleichungen erster Ordnung:** Quasilineare Differentialgleichung bei zwei unabhängigen Veränderlichen. Allgemeine Differentialgleichung bei zwei unabhängigen Veränderlichen. Vollständige und singuläre Integrale. Berührungstransformationen. Quasilineare Differentialgleichung bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen. Allgemeine Differentialgleichung bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen. Vollständige Integrale; HAMILTON-JACOBIsche Differentialgleichung. — **III. Systeme quasilinearer Differentialgleichungen erster Ordnung und die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung bei zwei unabhängigen Veränderlichen:** Charakteristiken eines Systems quasilinearer Differentialgleichungen erster Ordnung. Anfangswertproblem zweigliedriger Systeme (14. 1). Integration zweigliedriger Systeme (14. 1) mittels Differenzenverfahren. Integration zweigliedriger Systeme (14. 1) durch Iteration. MASSAUsche Gitterkonstruktion. Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit geradlinigen Charakteristiken. Anwendungen auf die Flächentheorie. Anwendungen auf die stationäre Gasströmung. Anwendungen auf die nichtstationäre Gasströmung. Anwendungen auf die Oberflächenwellen und auf plastische Spannungsfelder. Allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Anfangswertproblem und Integration n-gliedriger Systeme quasilinearer Differentialgleichungen erster Ordnung. Unstetigkeiten bei Lösungen hyberbolischer Differentialgleichungen. RIEMANNsches Integrationsverfahren. Anwendungen auf die eindimensionale nichtstationäre und die zweidimensionale stationäre Gasströmung. — **IV. Systeme quasilinearer Differentialgleichungen erster Ordnung und die quasilineare Differentialgleichung zweiter Ordnung bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen:** Charakteristikentheorie eines Systems quasilinearer Differentialgleichungen erster Ordnung. Charakteristikentheorie quasilinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Anwendungen auf stationäre und nichtstationäre Gasströmungen. Allgemeine Eigenschaften linearer Differentialgleichungen. Wellengleichung im R_1 und R_3; Prinzip von HUYGHENS. Wellengleichung im R_3 Absteigmethode von HADAMARD. Anwendung auf die linearisierte stationäre Überschallströmung um Drehkörper (linienhafte Quellenverteilung). Wellengleichung im R_m; DARBOUXsche Gleichung. Reduktion dreidimensionaler Probleme auf zwei- und eindimensionale durch Symmetrieannahmen. HADAMARDsche Integrationstheorie. Erläuterung des HADAMARDschen Grenzprozesses. Anwendung auf die Wellengleichung im R_2. Anwendung auf die dreidimensionale linearisierte stationäre Überschallströmung (flächenhafte Quellenverteilung). — Namen- und Sachverzeichnis.

LXIII BAND: **Quadratische Formen und orthogonale Gruppen.** Von Dr. sc. nat. **Martin Eichler,** Professor an der Universität Münster i. Westf. XII, 220 Seiten. 1952. DM 24.60; Ganzleinen DM 27.60

Inhaltsübersicht: Einleitung. — **I. Algebra der metrischen Räume:** Der metrische Raum und seine Automorphismen. Die Typen der metrischen Räume. Die Automorphismen eines isotropen Raumes. Die Spinor-Darstellung der orthogonalen Gruppe. Räume der Dimensionen 2 bis 6. — **II. Metrische Räume über perfekten diskret bewerteten Körpern:** Die Grundeigenschaften perfekter diskret bewerteter Körper und ihrer quadratischen Erweiterungen. Invariante Kennzeichnung der Räume und Raumtypen. Räume und Raumtypen über den Körpern der reellen und komplexen Zahlen. Die Gitter. Die Einheiten. Die Ideale. — **III. Die elementare Arithmetik der metrischen Räume über algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern:** Die Gitter. Die Ideale. Beziehungen zur Arithmetik der CLIFFORDschen Algebren. Gitter in isotropen Räumen. Die elementare Theorie der Einheiten. — **IV. Vektoren und Ideale:** Die Anzahlmatrizen. Eine Reduktion der Anzahlmatrizen. Eine weitere Reduktion der Anzahlmatrizen. Die Thetafunktionen. Modulformen und Modulfunktionen. — **V. Die höhere Arithmetik der metrischen Räume, insbesondere über dem Körper der rationalen Zahlen:** Die Q-Räume. Invariante Kennzeichnung der Räume und Raumtypen. Die elementare Theorie der Maße. Das absolute Maß der p-adischen Einheitengruppen. Die analytische Maßformel für definite Räume. Die geometrische Theorie der Einheiten. Die analytische Maßformel für allgemeine Räume. — Hinweise auf nicht berücksichtigte Literatur. — Anmerkungen. — Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages / Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Druck: Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, Göttingen. — Printed in Germany.
Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg.